

附录 A 书面翻译

钢筋混凝土结构非线性分析

Oral Buyukozturk

Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA02139, U.S.A

原文: Oral Buyukozturk, Nonlinear analysis of reinforced concrete structures, Computers & Structures, 1977, Vol. 7, pp. 149-156.

摘要: 判断复杂应力状态下混凝土是否屈服和破坏一般采用莫尔-库伦准则, 因为该准则判断材料是否破坏只与主应力有关, 其公式简单。广义屈服和破坏准则的建立主要是说明引起非线性的两种主要因素: 受拉下混凝土连续开裂和多向轴压下的非线性反应, 根据这些准则可以建立适合非线性有限元分析的增量型应力-应变关系。

对钢筋混凝土构件的有限元分析, 本文介绍了一种方法, 该方法可以直接考虑钢筋的作用, 用这种方法, 可以分别考虑钢筋和混凝土材料的应力-应变关系, 这样就可以有效方便地应用有限元软件进行分析。本文通过钢筋混凝土的算例分析说明该方法的适用性。

引言

分析过程中准确地定义钢筋混凝土构件的应力和变形状态是非常复杂的, 因为这受许多因素制约, 包括: (1) 混凝土非线性的荷载-变形关系以及混凝土在复杂应力下的本构关系 (2) 在递增荷载作用下混凝土的连续开裂以及在各种应力状态下定义混凝土的破坏行为 (3) 考虑钢筋的加强作用以及钢筋和混凝土的相互作用 (4) 与时间有关的特性, 例如混凝土的收缩和徐变。

由于影响因素的复杂性, 早期针对钢筋混凝土的研究采用基于大量试验结果的经验分析法, 或者基于简单的分析假定, 如结构的线弹性假定, 考虑当时传统分析技术的局限性, 作出这样的假定一般是必不可少的。

随着数值分析方法的发展, 如有限元方法[1,2], 研究者能够较真实的预估钢筋混凝土的内力和位移, 正是由于数值分析方法能够较好的预测这一特性, 所以能够有效地提高结构的计算效率。另外, 这种精细的分析方法可以帮助理解和解释在试验中观察到的结构构件行为。

利用有限元方法进行混凝土结构分析是非常新的概念。近几年, 人们对于利用有限元方法进行钢筋混凝土结构的分析越来越有兴趣, 尤其是考虑到开裂的影

响。Scordelis^[3]写过一篇针对钢筋混凝土结构有限元分析的全面调查报告。Mutoetal^[4]总结了在这一领域进一步要开展的工作。

有限元方法之所以能够成功应用在钢筋混凝土结构中[5-8]与量化混凝土荷载-变形关系[9-11]的发展是密不可分的。在有限元分析中, 将荷载-变形关系以合适的公式化形式来表示是十分必要的。尽管研究者进行了密集和持续的研究, 但是仍然没有出现被统一认可的能够全面描述混凝土在复杂应力状态下行为的本构关系。

本研究工作主要包括:(1) 提出和验证复杂应力状态下混凝土的屈服和破坏准则;(2) 提供在有限元分析中对钢筋直接建模的方法;(3) 通过算例验证该方法在钢筋混凝土结构有限元分析中的适用性。

利用本文提出的屈服和破坏准则可以较好的解释混凝土在拉应力下的连续开裂和多向轴压下的非线性反应。这些准则的建立并不需要事先假定开裂或屈服荷载。根据这些准则可以建立适合非线性有限元分析的增量型应力-应变关系。屈服和破坏准则的验证是以双轴压应力状态为基础的。但是, 提出的描述混凝土力学行为的公式是通用的, 并且可以通过改变参数来解释三维状态下的实验数据。

一般的莫尔-库伦理论

研究人员试图将一些经典的破坏理论应用于混凝土中。并对这些理论做出适当的修改克服其存在的不足, 或者使之与混凝土的力学行为更加吻合。因此许多经典破坏准则被应用于混凝土中形成新的破坏准则, 例如内摩擦-最大应力理论^[12], 八面体剪应力-正应力理论^[13], K.Newman 和 J.B. Newman 提出的双破坏准则^[14]。

八面体剪应力-正应力理论是莫尔-库伦(内摩擦)理论的一般化, 因为它考虑了中间主应力效应。一般来说, 莫尔-库伦理论可以用主应力^[15]来表示其破坏准则:

$$f(J_1, J_2) = 0 \quad (\text{A-1})$$

其中, J_1, J_2 可表示为:

$$J_1 = \sigma_{ij}, J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (\text{A-2})$$

且

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (\text{A-3})$$

(δ_{ij} 是克罗内克 δ 符号)

J_1 是平均应力 (静水压力)。 J_2 是不考虑静水压力 (应力球张量) 的应力偏量的第二不变量。对于延性材料, 使用较为广泛的塑性材料屈服条件是不考虑静水压力 J_1 的影响。然而, 静水压力对非均质材料的混凝土影响较大, 同时也影响着混凝土的最终破坏状态。因此, 对于混凝土材料的屈服和破坏准则必须考虑 J_1 的影响。

第三个塑性参数 J_3 在 Novozhilov^[15] 中有详细描述, 它表示平均剪应力和最大剪应力的比值。这个变量的变化范围很小, 它在屈服和破坏准则等式中的影响是次要的。因此, 对于混凝土这样的脆性材料, 可以用式 (A-1) 来判断结构屈服和破坏, 式 (A-1) 就是所谓的“一般莫尔-库伦”准则。

混凝土破坏准则

在一般莫尔-库伦准则的基础上, 并结合双轴实验结果, 本文提出了混凝土的破坏准则, 如下式:

$$3J_2 + \sqrt{3}\beta\sigma_0J_1 + \alpha J_1^2 = \sigma_0 \quad (\text{A-4})$$

式中 β , α , σ_0 是材料常数, 这些常数根据实验结果确定。Liu 等^[11]和 Kupfer 等^[10]考虑到所用的混凝土强度范围, 通过数值分析确定 β , α , σ_0 的取值为:

$$\beta = \sqrt{3}, \quad \alpha = 1/5, \quad \sigma_0 = P/3 \quad (\text{A-5})$$

将式 (A-5) 中的数值带入式 (A-4) 可得:

$$3J_2 + PJ_1 + J_1^2/5 = P^2/9 \quad (\text{A-6})$$

在平面应力状态下, 强度包络线可采用主应力 σ_1 和 σ_2 表示为:

$$27(2k^2 - k + 2)\sigma_1^2 + 45P(1+k)\sigma_1 - 5P^2 = 0 \quad (\text{A-7})$$

式中, $k = \sigma_2/\sigma_1$, 当 $k=0$ 时表示单轴受力状态。以主应力为坐标轴的强度包络线如图 1 所示。由式 (A-7), 可以看出, 强度包络线是绕主轴旋转和移动的椭圆。强度包络线一小部分在拉-拉区, 很少部分拉应力-压区, 但部分在压-压区。

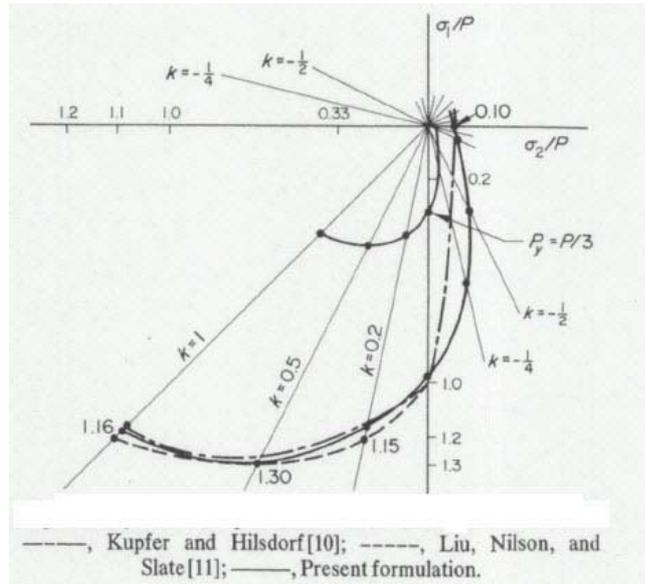


图 1 混凝土理论和实验强度包络线

总的来看, 实验值和理论计算的强度包络线吻合良好。强度包络线主要可以分为一下三部分:

(1) 压-压区

由式 (A-7) 可以进行计算出不同的 k 值对应的应力比 σ_1/P 的值, 当分别取: $k=0.2$, $k=0.5$, $k=1$ 时, 对应的 σ_1/P 的取值为: 1.15、1.30 和 1.16。计算结果和试验数据^[10,11]吻合较好。强度包络线包围的这一部分区域材料局部被压“破碎”而破坏, 这里用“破碎”一词来描述混凝土在平面压应力作用下的破坏特征。

如果有足够的试验, 就可以根据式 (A-6) 提出局部变形或极限应变的破坏准则, 这就与 Newman^[14]制定双破坏准则类似。但是, 目前极限应变或变形的提法还不够一般化, 不足以制定定量的公式化准则。

(2) 拉-压区

从图 1 可以看出, 在拉-压区, 强度包络线理论计算结果和试验结果有偏差。当拉应力 σ_2 的方向在两个单轴应力中间时, 这种偏离比较明显。当 $k=0$ 即单轴应力时, σ_1 出现两个极值。由式 (A-7) 可知, 第一个极值为 $\sigma_1 \approx P$ (单轴压应力状态), 第二个极值为 $\sigma_1 \approx 0.10P$ (单轴拉应力状态)。两个极值和试验结果吻合良好。为了和试验结果一致, 用直线连接两个极值点得到拉-压区的强度包络线 (如图 2)。在这个应力区, 当强度包络线上拉应力 σ_2 的值逐渐增大时, 混凝土会发生开裂。随着荷载进一步增大, 压应力 σ_1 会增大, 直至在 σ_1 方向, 混凝土被压破碎。

(3) 拉-拉区

在拉-拉区, 混凝土的应力-应变曲线是线弹性的, 破坏由于是混凝土的开裂导致的。混凝土双向抗拉强度与单向抗拉强度相同, 即用最大应力 (或应变) 准则来判断是否达到开裂限值。混凝土的抗拉强度根据混凝土的等级不同而有所不同。目前一般采用 $0.10P$ 作为混凝土的抗拉强度, 混凝土的强度包络线如图 2 所示。

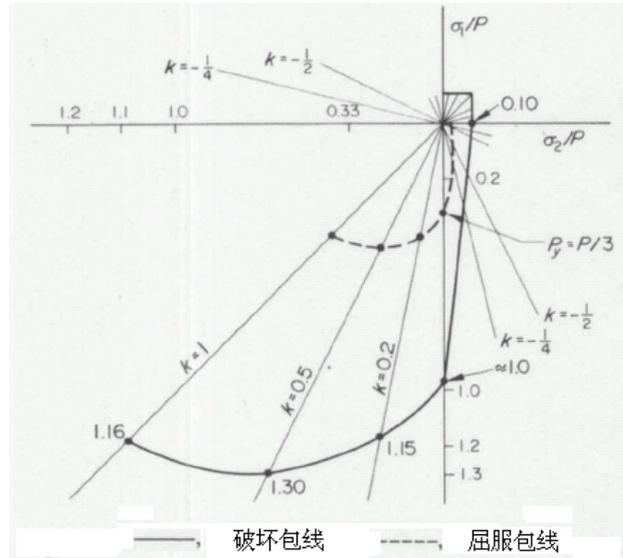


图 2 分析中假定的屈服准则和破坏准则

混凝土的屈服准则

混凝土在单轴受压下, 当应力小于抗压强度的 30%~35%时, 结构处在线弹性状态。在双轴应力状态下, 在压-压区, 由于受到侧向压力约束的影响, 混凝土中微裂缝的延伸和扩展受到限制^[7,11], 像强度增加一样, 随着主应力比的增加, 混凝土的弹性范围也增加。屈服面近似由破坏包线下降至一点得到: 该点是在单轴应力状态下, 当应力达到约抗压强度三分之一时, 混凝土开始屈服。

根据式 (A-4) 和式 (A-6), 给定的材料参数, 通过一般的破坏准则可以得到屈服面, 如下式:

$$3J_2 + \bar{\sigma}J_1 + J_1^2/5 = \bar{\sigma}^2/9 \quad (\text{A-8})$$

其中

$$\bar{\sigma} = P_y \approx \frac{1}{3}p \quad (\text{压应力状态}), \quad \bar{\sigma} > 0。$$

混凝土在主应力空间的屈服面如图 2 所示。

在前面讨论过, 在拉-压区, 等式 (A-8) 表示的强度包络线和试验数据稍有偏差; 且在这个区内, 试验结果可近似用一条直线表示。然而我们可以认为等式 (A-8) 和这一直线关系的偏差并不重要。这种认为基于以下几点原因:

(1) 当拉应力 σ_2 较小时, 可以忽略 σ_2 对材料非线性影响。

(2) 当拉应力 σ_2 较大时, 混凝土行为是由与压应力 σ_1 垂直方向的开裂控制的^[11], 因此, 随着开裂的延伸和扩展, σ_2 逐渐消失, 屈服退化为单轴受压屈服, 这时只要考虑压应力 σ_1 方向的非线性。

因此, 在目前的研究中, 等式 (A-8) 表示的屈服条件既可以用于压-压区, 也被用于拉-压区。这保证了屈服面的连续性。

在拉-拉区, 和试验一致^[10,17], 假定混凝土是线弹性段的斜率等于混凝土单轴受压时的初始切线弹性模量。

采用应力应变关系来表示混凝土的屈服是很有吸引力的, 因为, 就像前面提到的, 这样可以用应力偏量的不变量和静水压力对混凝土的力学行为的影响做出物理解释。此外, 以应力应变关系表示的屈服条件, 可以使得在非线性分析中分析材料的塑性发展变得很方便。

弹塑性本构关系-应变关系

在多轴应力状态下建立弹塑性应力-应变关系, 必须首先定义 (a) 屈服准则, (b) 流动准则, (c) 硬化准则。基于以上这些假定确定后, 可以建立弹塑性本构关系-增量型 Prandtl-Reuss 关系。

等式 (A-8) 的屈服条件可以写成以下形式:

$$f = 3(3J_2 + \bar{\sigma}J_1 + J_1^2/5)^{1/2} = \bar{\sigma} \quad (\text{A-9})$$

这里, $\bar{\sigma}$ 表示“等效应力”, 可以将多轴应力状态等效成简单的单轴应力状态。当 $\bar{\sigma}$ 等于在单轴压应力状态下的 P_y 值时, 混凝土开始屈服。当荷载继续增加时, 屈服继续发生, 塑性应变出现。每一个等效塑性应变 $\bar{\epsilon}^p$ 对应一个等效应力。等效塑性应变可以直接从单轴受压曲线获得, 即从总应变中减去弹性应变部分。

在等效应力-应变曲线中 ($\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}^p$), H' 表示硬化系数。从曲线中, 我们可以得到:

$$d\bar{\sigma} = H'd\bar{\epsilon}^p \quad (\text{A-10})$$

另外, 由式 (9) 可知, df 可以写成:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \{d\sigma\} + \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \right] d\bar{\sigma} = d\bar{\sigma} \quad (\text{A-11})$$

或

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \{d\sigma\} + \frac{3J_1}{2\sigma} d\bar{\sigma} = d\bar{\sigma} \quad (\text{A-12})$$

结合式(10)可得:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \{d\sigma\} = \left(1 - \frac{3J_1}{2\sigma}\right) H' d\bar{\varepsilon}^p \quad (\text{A-13})$$

对于以下的多轴塑性规则, 采用常用的 Prandtl-Reuss 表达式, 且材料各向同性硬化, 各向同性硬化是指, 在所有的应力方向, 屈服面的扩张是相同的。也就是说, 随着塑性应变的发生, 后继屈服面与初始屈服面形状保持不变。塑性规则如下:

$$\{d\varepsilon^p\} = d\bar{\varepsilon}^p \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \quad (\text{A-14})$$

由于弹性应变与应力是线性变化的, 则由应力的增加而引起的弹性应变的增加可以表示成:

$$\{d\sigma\} = [C] \{d\varepsilon^e\} \quad (\text{A-15})$$

这里, $[C]$ 表示弹性矩阵。也可采用表示为:

$$\{d\sigma\} = [C] \{d\varepsilon - d\varepsilon^p\} \quad (\text{A-16})$$

这里, $d\varepsilon$ 是应变增量。

将式 (A-14) 带入式 (A-16), 并结合式 (A-13), 我们可以得到增量型的应力-应变关系:

$$\{d\sigma\} = \left[[C] - \frac{[C] \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] [C]}{\left(1 - \frac{3J_1}{2\sigma}\right) H' + \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] [C] \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]} \right] \{d\varepsilon\} \quad (\text{A-17})$$

或者

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon\} \quad (\text{A-18})$$

这里 $[D]$ 是弹塑性矩阵。可以看出, $[D]$ 是对称的。上式中 $(1-3J_1/2\bar{\sigma})$ 不等于 0, 因为若假定 $(1-3J_1/2\bar{\sigma})$ 等于 0 的话, 代入式 (A-8) 中可知 J_2 是负值, 不符合规定, 所以不能等于 0。理想弹塑性材料, 硬化系数 H' 等于 0, 从等式(A-17)可以看出这不会引起计算问题, 因为 $[C]$ 是非奇异阵。

微裂缝受限对于各向同性硬化的影响

多轴硬化对于混凝土变形的影响用等式 (A-17) 中本构关系弹性矩阵 $[C]$ 的表示^[7,11]。这是通过在主压应力空间引入等效切线模量和融合弹性矩阵 $[C]$ 来实现的。然而在弹塑性阶段, 组成矩阵中的弹性部分是基于硬化系数 H' 的, H' 是通过单向轴压试验确定的。

在增量型的模型中, 可以通过用与主压应力比有关的函数来考虑硬化系数的变化。采用有已知应力状态(图 3)的有效硬化系数 H'_b 来表示。计算过程中, 当计算复杂应力时, 只需将式 (A-17) 中的 H' 用有效硬化系数 H'_b 代替即可。

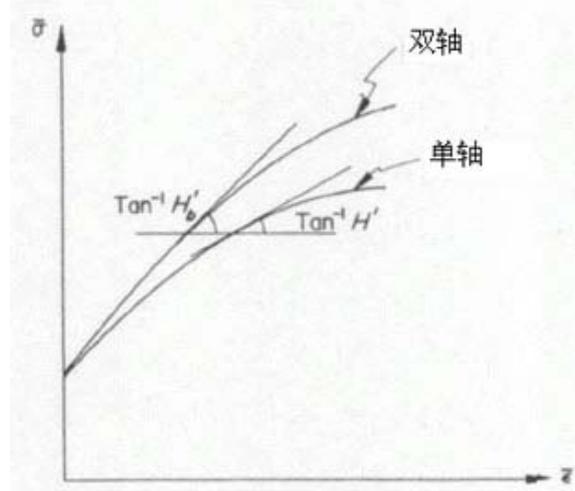


图 3 双轴状态下的有效硬化系数

连续开裂

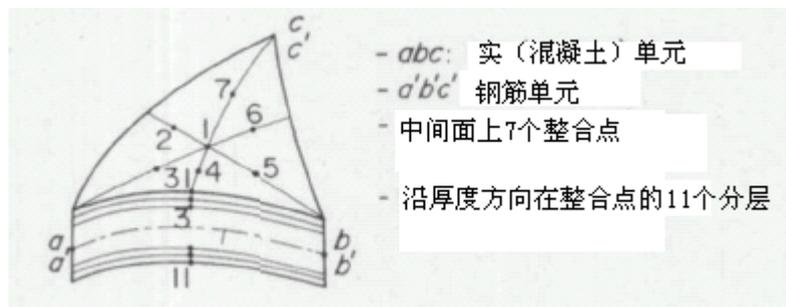
内部的应力和变形以及外部的挠度对开裂影响很大。裂缝首先在结构内相对薄弱的地方开始延伸可扩展。当外部荷载增大时, 其他部位出现新的裂缝, 已有的裂缝进一步延伸和扩展。为了在分析中能够综合考虑连续开裂的现象, 必须重新定义模型, 并且分析必须和新模型吻合。这是通过在模型中运用裂缝单元实现^[18], 并且该理论逐步完善。

通过坐标轴转换计算出应力方向, 如果在某一点处, 单元应力状态满足破坏准则, 那么定义在该点处产生裂缝, 裂缝垂直主拉应力方向发展。为了解释随着

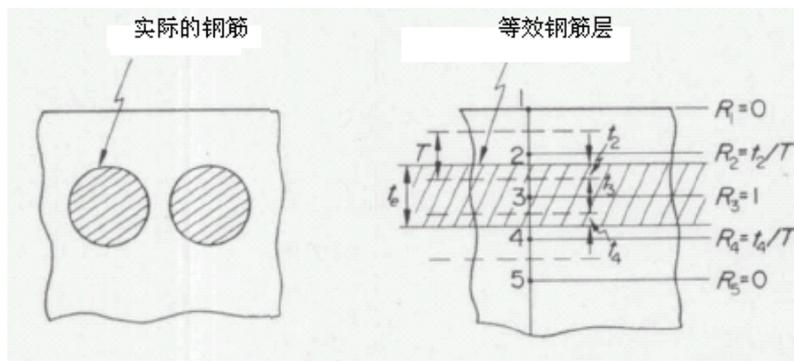
荷载的增加裂缝不断延伸和扩展, 建立增量理论的弹塑性矩阵 $[D]$ 通式, 将其中的几个值设为 0, 这样可以使得在出现裂缝的点在垂直裂缝方向上不再传递拉应力。这样, 裂缝的发展将不再依赖于之前对于裂缝开展方向的假定。这里要说明, 剪切模量可以保留在 $[D]$ 中用来解释骨料之间的咬合。

钢筋的影响

由于混凝土一般和钢筋一起使用, 一个精确的分析需要考虑钢筋和混凝土的共同作用。目前对于钢筋混凝土结构的有限元分析, 已经应用了可以直接考虑钢筋影响的方法。在模型中, 在结构的每一个物理位置, 采用两个相同的几何单元。第一个单元(混凝土单元), 表示混凝土, 是一个“实”单元, 第二个单元(钢筋单元), 是一个空单元, 模拟在指定方向上受力的钢筋单元(图 4a)。钢筋与混凝土之间的变形协调通过使用相同的形函数来实现。



(a) 双曲等参复合单元



(b) 等效钢筋

图 4 分析模型中钢筋的表示

通过这种方法, 组成钢筋混凝土的两种材料的应力-应变关系得到解耦, 使其能够在有限元程序中有效、方便地应用。除此之外, 这种方法可以方便地查看钢筋和混凝土在抵抗荷载时的相对贡献, 可以用在二维和三维模型中。并且, 在钢筋单元中, 钢筋可以用离散单元或是等效厚度的钢筋层(板)来表示。

在本研究中, 该方法的应用体现在对双曲等参薄壳单元^[19]的应用中。首先做如下假定:

(1) 实际的钢筋用等效的各向异性的钢筋层来代替, 这要通过对弹塑性矩阵 $[D]$ 做适当的调整来实现。这些钢筋层只在与钢筋实际受力方向相同的方向上存在应力, 不考虑销栓作用。

(2) 钢筋与混凝土之间保持应变协调。这就意味着在两种材料之间连接充分强, 在钢筋与混凝土的界面上不会产生粘结滑移。

我们知道, 对于板单元和壳单元, 应力-应变关系是沿着厚度方向分层定义的。对于这种分析, 需要应用等式 (A-18) 定义的增量型应力-应变关系。对于实(混凝土)单元, 一般的应力-应变关系可以表示为:

$$\begin{Bmatrix} dN \\ dM \end{Bmatrix} = \int_{-H/2}^{H/2} \begin{bmatrix} [M][M]h \\ [M]h[M]h^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_0 \\ dk \end{pmatrix} dh \quad (\text{A-19})$$

式中:

dN = 轴向应力增量

dM = 弯曲应力增量

$d\varepsilon_0$ = 轴线处应变分量

dk = 弯曲应变分量

H = 单元厚度

在单元的每一个积分点, 沿厚度方向等间距 T 分为若干层(图 4a)。利用 $[D]$, 对每一个加载增量下计算每一层的矩阵 $[M]$ 。

对于钢筋单元, 以实际的钢筋位置为基础, 沿厚度方向计算每一个钢筋层的等效厚度 t_e 。对于同单轴条件一致的各向异性的钢筋层(代表实际的钢筋):

$$d\sigma_i = (R_i D_i) d\varepsilon_i \quad (\text{A-20})$$

这里 $R_i = t_i/T$, t_i 是第 i 层的等效钢筋面积。图 4(b)表示了单层钢筋单元的 R_i 值。对每一层, R_i 值分别代替 $[D]$ 中的取值, 该值是在与单轴钢筋方向一致的局部坐标系下取得的。

第 i 层的应力-应变关系变为:

$$\begin{Bmatrix} dN \\ dM \end{Bmatrix} = \int_{-H/2}^{H/2} \begin{pmatrix} R_i D_i & R_i D_i h \\ R_i D_i h & R_i D_i h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_0 \\ dk \end{pmatrix} dh \quad (\text{A-21})$$

采用等间隔 T 进行数值迭代这一积分很容易计算。需要注意的是, 如果没有钢筋, R_i 值为 0。

算例

对于钢筋混凝土构件的破坏分析技术已经在非线性有限元程序中得到了应用^[20]。用两个应用双曲等参数的薄壳单元来证明该种方法的适用性。

深梁

用来分析的钢筋混凝土深梁模型如图 5 所示。这个梁和 Leonhard 的试验中试件 WT3 相对应, 文献^[21]中有详细的描述。该模型的混凝土应力-应变曲线如图 6 所示, 单轴抗压强度 302kg/cm^3 。断裂强度是 48kg/cm^2 。

钢筋是用位于梁底部的等效厚度为 0.107cm 的两层钢筋层来模拟的。由于对称性, 可以只对梁的半跨进行研究。

大概达到 37% 极限荷载时, 在支座区域发生屈服。大概在 55% 的极限荷载时, 在梁的底部出现第一条受拉裂缝。当荷载逐渐增加时, 屈服和裂缝进一步发展, 如图 7 所示。极限荷载达到 120t 时, 此时在支座区域, 由于屈服和裂缝的进一步延伸和扩展, 材料失稳。

对于裂缝的出现、延伸和扩展以及构件变形的预测有限元分析与试验结果吻合良好^[21]。挠度和极限荷载的有限元分析结果比试验值略小 (图 8) (分析值比试验值小约 7%)。分析值和试验值的误差在试验的容许范围内。

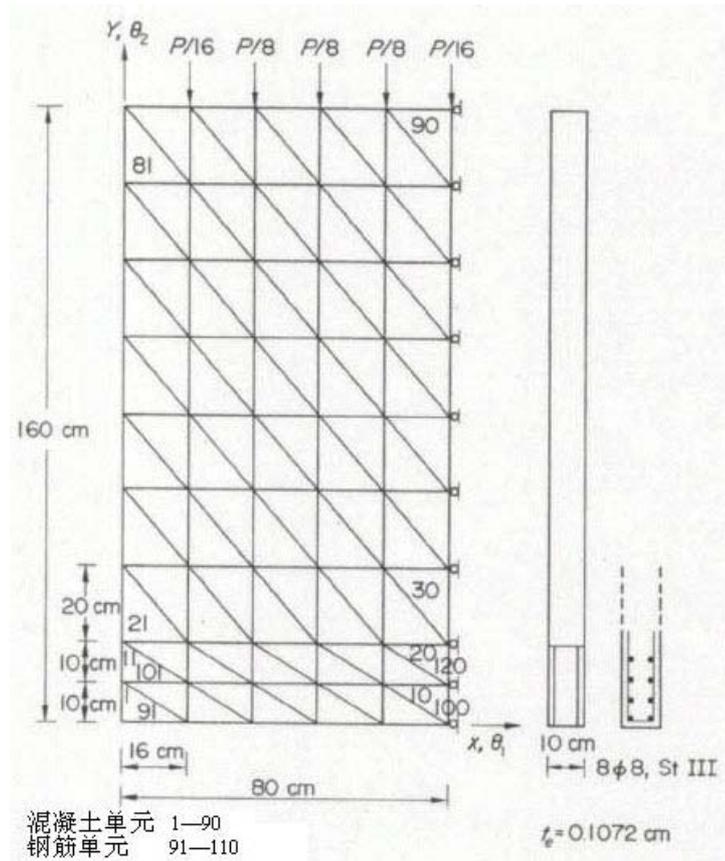


图 5 深梁模型

圆柱形薄壳屋顶

图 9 所示是穹顶问题的模型。假定的混凝土应力-应变关系和图 6 相似，初始弹性模量是 $2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ 。断裂强度假设为抗压强度的十分之一。钢筋层在壳两个表面中间，厚度为 0.6% 壳厚度。假设钢筋层在两个正交的方向有相同的厚度和刚度，并且不考虑剪切的影响。

在单元 1, 8 和 16, 当力达到 0.015 kg/cm^2 时, 混凝土出现了受拉破坏。(在分析中, 出现裂缝的单元, 弹性剪切模量仍保留一半是为了考虑混凝土内的骨料的咬合作用), 随着荷载增大, 裂缝的发展过程如图 10 所示。壳边缘中点荷载-变形曲线以及 Scordelis 和 Lo^[22] 给出的弹性计算结果如图 11 所示。曲线表明裂缝从初始阶段对非线性的影响就很大。

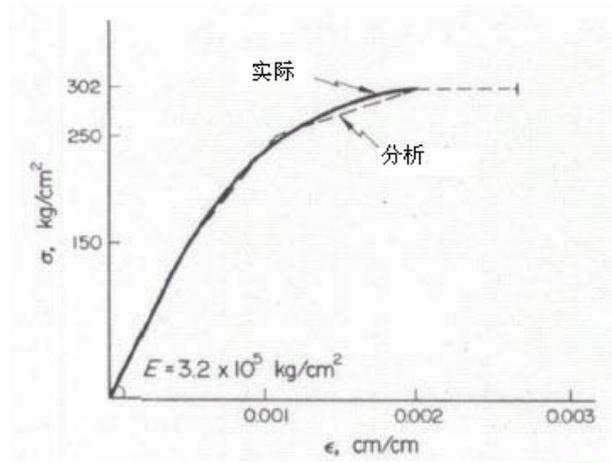


图 6 混凝土应力-应变曲线

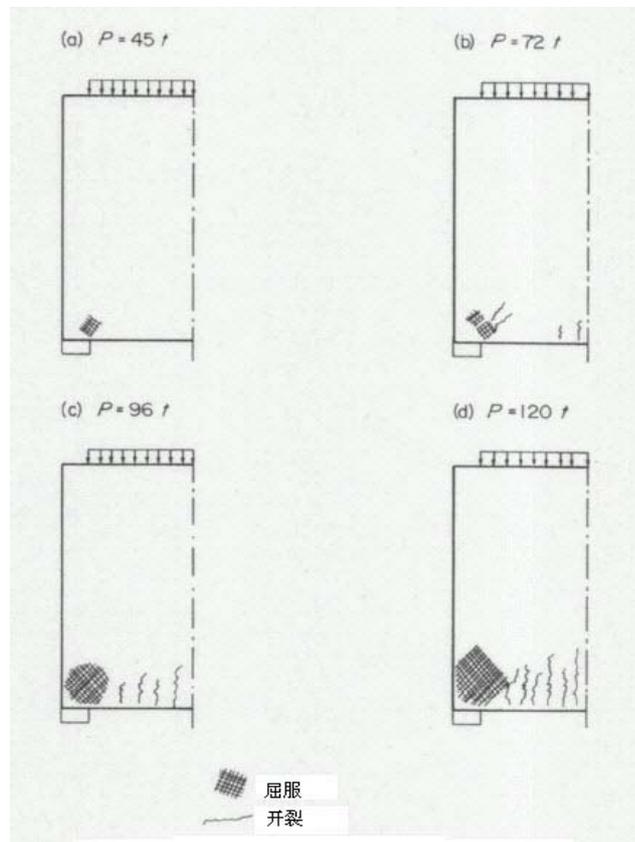


图 7 梁内屈服和开裂的预测

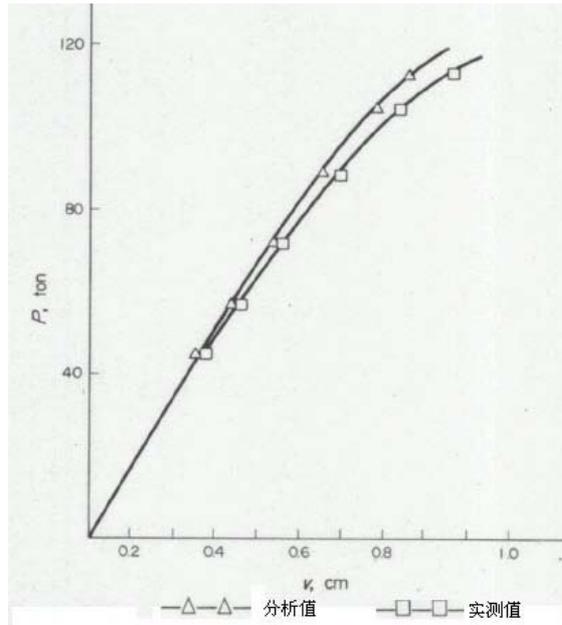


图 8 梁跨中竖向位移

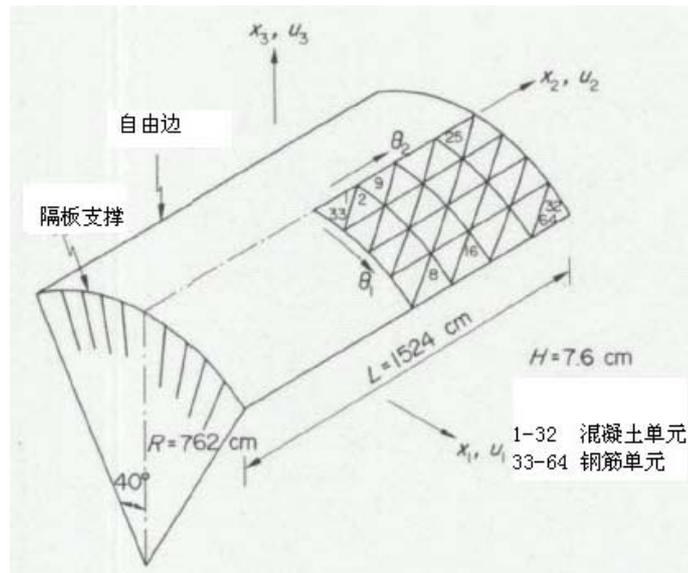


图 9 钢筋混凝土屋面模型



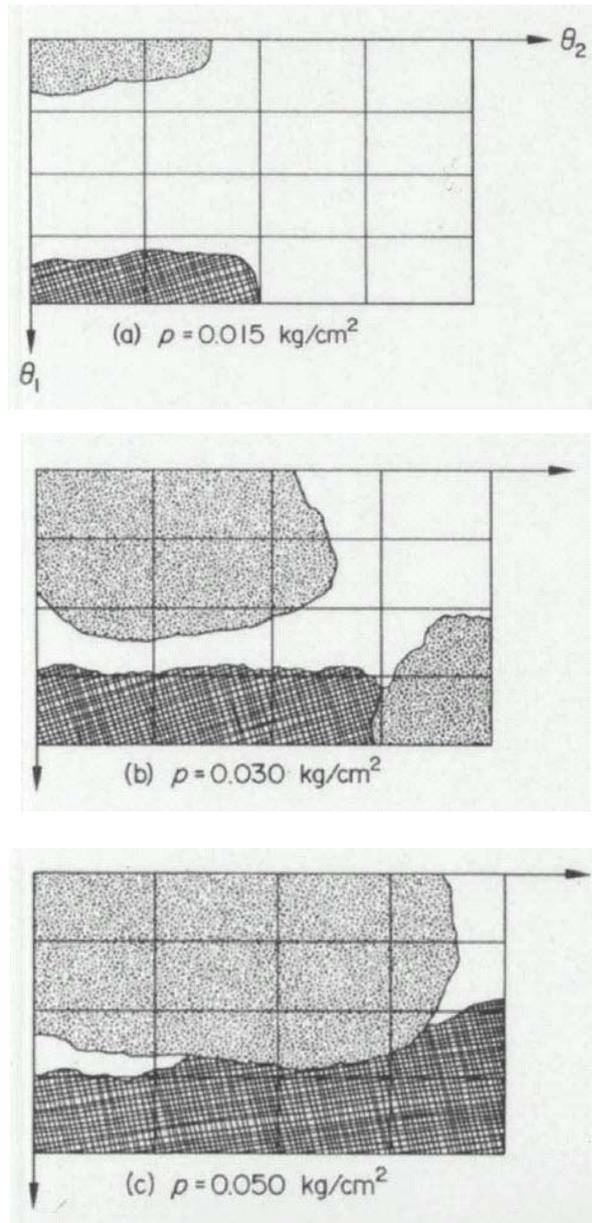


图 10 屋面壳单元开裂预测

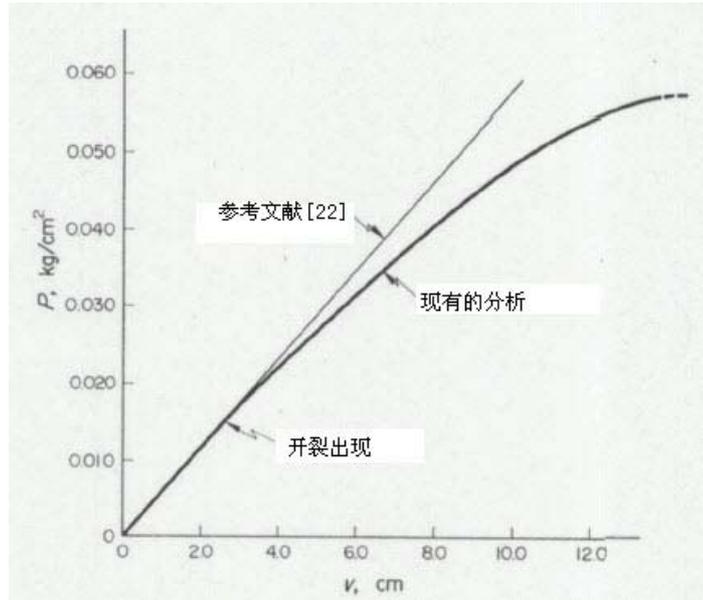


图 11 自由边中点竖向变形