

附录 A 外文资料的书面翻译

混凝土结构在往复荷载下的塑性损伤模型

原文: Lee J, Fenves G L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structure. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998, 124(8) : 892-900

摘要: 本文基于连续损伤力学中的断裂能量和刚度退化的概念, 建立了一个混凝土在循环荷载作用下的塑性损伤模型。该模型有两个损伤变量, 分别是拉伸损伤和压缩损伤。本文在屈服函数中引入一个多重硬化变量来描述不同的损伤类型。单轴强度函数被分为有效应力和弹性刚度退化两部分。弹塑性响应的本构关系与退化损伤响应解耦, 这有利于进行数值模拟。在现有的模型中, 用有效应力的强度函数控制本构模型屈服面的演化, 这样便于用实验结果进行校核。一个简单的同时满足热力学一致性标量退化模型被用来模拟裂缝在扩展和闭合过程中弹性刚度的损伤和恢复效应。本文通过几个单调和循环荷载作用下的混凝土试件数值模拟算例验证了该塑性损伤模型的适用性。

引言

研究裂缝发生和发展的模型是混凝土结构失效分析中最重要方面之一。混凝土的裂缝发展有别于其他的材料, 例如金属和玻璃。混凝土中的裂缝不是突然出现在自由表面上, 而是一个微裂缝的持续延伸和扩展过程(Mehta 和 Monteiro 1993)。微裂缝的形成宏观表现为材料的软化行为, 并且引发了结构中的内力集中和重分布。

这个现象在宏观层面上可以用经典塑性力学模拟 (Pramono 和 Willam 1989; Chen 1994)。另外, 微裂缝的扩展还引起了刚度退化, 这可以从混凝土在循环荷载作用下的行为中观察得到(Karsan 和 Jirsa 1969;Gopalaratnam 和 Shah 1985)。刚度退化很难用经典塑性力学模拟。在连续损伤力学中, 刚度退化可以用应力和有效应力之间的关系来模拟。Kachanov(1986)、Lemaitre 和 Chaboche(1990)对连续损伤力学进行了综述。之后, 一些基于连续损伤力学的混凝土本构模型也得以建立(Mazars 1986; Mazars 和 Pijaudier-Cabot 1989; Cervera et al. 1995)。但是, 连续损伤力学理论中没有考虑非线性 (也就是塑性) 应力的影响, 所以其并不能提供一个合适的剪胀性控制。而剪胀性控制对于模拟多轴荷载受力下素混凝土和钢筋混凝土结构的行为是十分重要的。

在塑性损伤模型中, 刚度退化被嵌入到了一个塑性模型中(Simo 和 Ju 1987; Ju1989; Lubliner et al 1989; Yazdani 和 Schreyer 1990)。在这耦合的弹塑性损伤模型中(Simo 和 Ju 1987; Ju1989), 有效应力的概念被用来描述刚度退化。这个

模型的优点是刚度退化最初就被耦合到本构关系中, 并且可以从线性方程式的塑性变形中解耦。但是正如其他基于连续损伤力学的模型一样, 用实验数据来校准表征屈服面演化的参数是十分困难的, 因为大多数实验数据是基于应力的。

在 Lubliner 和 coauthors(Lubliner 等 1989)提出的模型中(本文中指的是 Barcelona 模型), 一个基于断裂能的标量损伤变量描述了所有的损伤类型。除了损伤变量之外, 模型还分别引入了一个弹性和塑性的退化变量来模拟弹性刚度的退化。在本构关系中, 刚度退化和塑性变形耦合在一起, 使得用实验结果校核参数变得较为方便。但是, 耦合的关系给出了一个较为复杂和不稳定的数值算法, 使得在迭代计算时引起了伪塑性卸载(Lee 和 Fenves 1994)。

因为类准脆性材料在循环荷载作用下要经受多个损伤状态, 例如受拉开裂、受压压溃和刚度退化, 所以采用一个单一的损伤变量是不够的。可以采用多重硬化(损伤)变量(Murray 等 1979; Mazars 1986; Ohtani and Chen 1988; Mazars and Pijaudier-Cabot 1989)来解释不同的损伤响应。各向同性连续损伤力学模型(Mazars 1986; Mazars and Pijaudier-Cabot 1989)采用多个损伤变量也不能描述损伤在拉伸和压缩作用下的不同结果, 因为损伤变量会使得两种作用最终有同样的损伤演化。

当循环荷载在拉、压之间变化时, 可以在拉区向压区逐渐转化的过程中观察到退化的刚度重新恢复(Reinhardt 1984)。刚度的恢复是裂缝闭合的结果。基于各向同性和各向异性这两种损伤模型的研究, 一些用于模拟刚度恢复的模型也已经被提出(Ortiz 1985; Ju 1989; Cervera e 等. 1995; Hansen and Schreyer 1995)。

本文使用基于断裂能损伤的概念建立了一个在循环荷载作用下的塑性损伤模型, 这个模型类似于 Barcelona 模型。分别采用考虑拉、压损伤的两个损伤变量来解释不同的损伤状态。使用多重损伤(或硬化)变量对由 Lubliner 等人提出的屈服函数进行了修改。单轴强度函数被分解为与有效应力和弹性刚度退化两部分, 本文中后者称为退化损伤。弹塑性响应的本构关系与退化损伤响应解耦。有效应力的强度函数被用来控制本构模型屈服面的演化, 这使得用实验结果进行校核变得简单易行。最后, 引入一个简单的并满足热力学一致性的刚度恢复模型来模拟裂缝的扩展和闭合。在现有的方法中, 尽管弹性损伤仍然是各向同性的, 但塑性损伤模型已提供了拉力和压力各自单独的演化, 并且通过塑性应变诱导方向性的损伤。

通过混凝土结构的数值算例与试验结果的对比分析可知, 本文建立的塑性损伤方法的适用性。目前模型的开发还局限于适用于混凝土材料微小变形理论。文中 \hat{x} 和 \hat{x}_i 分别代表了矩阵 x 特征值矩阵和第 i 个特征值。

塑性损伤模型的框架

研究者已经使用热力学的方法提出了塑性损伤和连续性损伤模型(Ju 1989; Hansen 和 Schreyer 1994)。本构关系由热力势函数推导而来, 因此和热力学的相关公式相一致。在热力学的方法中, 由于需要定义明确合理的势函数, 并且需要优先定义若干状态变量及其共轭的状态变量, 因此很难基于物理观察结果建立一个更适合类准脆性材料建模的本构关系, 如混凝土本构关系。将塑形流动法则与混凝土模型相结合来估计混凝土的剪胀性时, 结果不理想。本文建立的塑形损伤模型的本构方程是由一个更直接, 但仍然满足热力学一致性的方法推导出的。对现有模型的热力学说明在附录 I 中给出。

在塑形增量理论中, 应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 分解为弹性应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ 和塑形应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, 弹性应变张量与应力张量之间满足线弹性关系, 应变张量公式如下:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (1a,b)$$

其中弹性刚度 \mathbf{E} 是一个四阶张量; $\boldsymbol{\sigma}$: 应力张量。在塑形损伤理论中, 塑形应变代表了所有的不可逆变形, 包括由微裂缝引起的部分。从 (1) 式中可得, 应力-应变关系为:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (2)$$

在连续损伤理论中, 应力通过一个四阶张量 \mathbf{D} 映射到有效应力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 中:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} \quad (3)$$

有效应力是由 (2) 式中的无损伤弹性刚度定义的, 因此有效应力可表达为:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (4)$$

其中 \mathbf{E}_0 : 初始弹性刚度张量。在实际考虑中, 各向同性的退化损伤是由多种假定得来的。若用一个标量型退化损伤参数 D ($0 \leq D < 1$) 来体现各向同性的损伤, 则有 $\mathbf{D} = 1/(1-D)\mathbf{I}$, 其中 \mathbf{I} 是一个四阶单位张量, 因此由 (3) 式有:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-D)\bar{\boldsymbol{\sigma}}; \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = (1-D)\mathbf{E}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (5a,b)$$

通过对比 (2) 和 (5) 式, 可得 $\mathbf{E} = (1-D)\mathbf{E}_0$, 其中 D 代表了弹性刚度的退化。

本文使用一个基于标量塑性势函数 Φ 的流动法则来计算塑性应变率。对于有效应力空间中定义的塑性势函数, 塑性应变由下式给出

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \Phi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (6)$$

其中 $\dot{\lambda}$ 不是 Lamé 常数的导数, 而是一个被称为塑性一致性参数的非负函数。除了塑性应变之外, 还需要另一个内部变量来描述损伤状态。在现有的模型中, 假定 $\boldsymbol{\kappa}$ 是唯一必要的状态参量, 它的变化表达式如下

$$\dot{\kappa} = \lambda \tilde{\mathbf{H}}(r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}), \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (7)$$

其中 r 为一个 0 阶的应力齐次函数。由于刚度损伤变量 $(1-D)$ 的使用, 并且对任意正的标量 x 都有: $r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = r(x\hat{\boldsymbol{\sigma}})$, $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}), \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}), \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa})$ 式 (7) 可变为:

$$\dot{\kappa} = \lambda \mathbf{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (8)$$

正如接下来所述的一样, 考虑塑性损耗后可以推导函数 \mathbf{H} 。

通过实测类准脆性材料, 我们观察到在应力空间有一个能够判别破坏或损失状态的曲面。这个曲面叫做屈服面, 它在经典塑形力学中根据损伤参数或硬化参数而演化, 而且限制了当前的容许应力。由于类准脆性材料中的受拉损伤和受压损伤具有较大的差别, 因此不能采用一个参数来表征所有的损伤状态。为了反映混凝土在拉、压情况下的不同响应, 需要采用一个多硬化参数 (或多软化参数) 的屈服函数, 这个函数至少有 2 个参数来描述本构模型屈服面的演化。若两个状态参量 f_t 和 f_c 分别代表材料的单轴抗拉强度和抗压强度, 则屈服面应符合如下条件:

$$\tilde{F}(\boldsymbol{\sigma}, f_t, f_c) \leq 0 \quad (9)$$

假设 \tilde{F} 对三个参数而言都是一阶的齐次函数, 即对任意给定的正实数 x 都有 $x\tilde{F}(\boldsymbol{\sigma}, f_t, f_c) = \tilde{F}(x\boldsymbol{\sigma}, xf_t, xf_c)$ 。而且, 假设在应力空间中 \tilde{F} 是一个各向同性的函数。这个屈服面函数将始终保持着各向同性, 尽管它的硬化行为导致了屈服面的扩张或收缩。

在现有模型中, (9) 式中的单轴强度函数由两个损伤参数 κ_t 和 κ_c 表示。

$$f_t = f_t(\kappa_t); f_c = f_c(\kappa_c) \quad (10a,b)$$

假设 (10) 式都能被可以分解为退化损伤和有效应力响应两部分, 则该式与 (5) 式形式相同, 有:

$$f_t = [1 - D_t(\kappa_t)]\bar{f}_t(\kappa_t); f_c = [1 - D_c(\kappa_c)]\bar{f}_c(\kappa_c) \quad (11a,b)$$

其中 $0 \leq D_t \leq 1, 0 \leq D_c \leq 1$, 分别为拉力和压力的退化损伤响应。 f_t 和 f_c 分别表示单轴拉伸和压缩应力函数的有效应力响应。因为 D_t (或 D_c) 仅是 κ_t 和 κ_c 的函数, 则 (5) 式中的退化损伤变量 D 可用于同时描述拉伸和压缩的退化响应, 其中 D 可定义为:

$$D = D(\boldsymbol{\kappa}) = 1 - (1 - D_t)(1 - D_c) \quad (12)$$

应当注意的是, (12) 式中的 D 满足 $0 \leq D \leq 1$, 且单轴拉伸情况下: $D_c=0, D=D_t$, 单轴压缩情况下: $D_t=0, D=D_c$ 。因此, 在单轴响应中, 为不失一致性的结果, (11) 式可采用:

$$f_t = (1-D)\bar{f}_t; f_c = (1-D)\bar{f}_c \quad (13a,b)$$

由于 \tilde{F} 是一个一阶的齐次函数以及 (12) 式中 D 的定义, 可将(5)式和 (13) 式中代入 (9) 式, 可得到:

$$\tilde{F}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{f}_t, \bar{f}_c) \leq 0 \quad (14)$$

通过引进新的向量函数 $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\boldsymbol{\kappa}) = \bar{\mathbf{c}}(\bar{f}_t(\boldsymbol{\kappa}_t), \bar{f}_c(\boldsymbol{\kappa}_c))$, (14) 式中的屈服函数可改写为一个应力和损伤变量的函数 $F(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) = \tilde{F}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{f}_t, \bar{f}_c)$

$$F(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) \leq 0 \quad (15)$$

其中, F 也是一个具有多重硬化演化的各向同性一阶齐次标量函数。

有了上述理论框架上, 可仅仅采用 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $\boldsymbol{\kappa}$ 描述现有的塑性损伤模型中的弹塑性响应, 如下式:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \in \{\bar{\boldsymbol{\sigma}} \mid F(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) \leq 0\} \quad (16a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \Phi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (16b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \mathbf{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (16c)$$

除了 (16) 式之外, 利用 Kuhn-Tucker 的补充条件和塑性一致性条件可得到以下关系式, 用作加载/卸载条件:

$$\dot{\lambda} \geq 0; \dot{\lambda} F = 0; \dot{\lambda} \dot{F} = 0 \quad (17a-c)$$

总应力由 (12) 式得到, 该值与退化损伤结果有关, 如下式: :

$$\boldsymbol{\sigma} = [1 - D(\boldsymbol{\kappa})] \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (18)$$

由 (16) ~ (18) 式建立的现有的本构系统, 在数值计算时, 较为方便, 因为弹塑性响应的计算已经从退化损伤过程中分离出来。

本构关系

损伤的演化

通过评估形成微裂缝需要耗散的断裂能, 可以定义类准脆性材料的损伤。在 Barcelona 模型中 (Lubliner 等. 1989; Oller et al. 1990) 采用一个拉、压损伤组合的标量损伤变量描述了所有的损伤状态。虽然一个标量损伤变量模型可以模拟单调加载问题, 但它并不适合用于循环荷载下混凝土力学行为的模拟, 因为在拉、压荷载作用下, 材料经历着不同的损伤过程。本文分别对拉、压两种不同的损伤采用两个损伤变量各自独立地定义, 并且每个变量都被分解为有效应力响应和刚度退化响应。

考虑单轴拉、压应力状态时, 引进了一个状态变量 $\aleph \in \{t, c\}$ 。 $\aleph = t$ 时为单轴拉力状态; $\aleph = c$ 时为单轴压力状态。假定塑性应变决定应力。在 Barcelona 模型中, 单轴应力用 σ_{\aleph} 表示, 相应的标量塑性应变用 ε^p 表示, 它们之间的关系可表示为:

$$\sigma_{\aleph} = f_{\aleph 0} [(1 + a_{\aleph}) \exp(-b_{\aleph} \varepsilon^p) - a_{\aleph} \exp(-2b_{\aleph} \varepsilon^p)] \quad (19)$$

其中, $f_{\aleph 0}$ 为初始屈服应力, 它是不考虑损伤的最大应力; a_{\aleph} 和 b_{\aleph} 为常数。式 (19) 中的函数的基本运算由式 (11) 给出, 假定退化也是指数形式

$$1 - D_{\aleph} = \exp(-d_{\aleph} \varepsilon^p) \quad (20)$$

其中, d_{\aleph} 为常数。然后可以得到有效应力

$$\bar{\sigma}_{\aleph} = f_{\aleph 0} [(1 + a_{\aleph}) (\exp(-b_{\aleph} \varepsilon^p))^{1-(d_{\aleph}/b_{\aleph})} - a_{\aleph} (\exp(-2b_{\aleph} \varepsilon^p))^{2-(d_{\aleph}/b_{\aleph})}] \quad (21)$$

单轴损伤变量可由 κ_{\aleph} 表示, $0 \leq \kappa_{\aleph} \leq 1$, κ_{\aleph} 的定义如下:

$$\kappa_{\aleph} = \frac{1}{g_{\aleph}} \int_0^{\varepsilon^p} \sigma_{\aleph}(\varepsilon^p) d\varepsilon^p \quad (22)$$

其中:

$$g_{\aleph} = \int_0^{\infty} \sigma_{\aleph}(\varepsilon^p) d\varepsilon^p \quad (23)$$

g_{\aleph} 为在微裂缝开展过程中耗散能密度。因为单位体积耗散能不能被直接赋予在材料属性上, 所以 g_{\aleph} 应该由其他已知的材料性质得到, 如断裂能。假定处于单轴的拉伸状态 G_{\aleph} 的断裂能, 并且给定对应的即单轴压缩状态的材料性质 g_{\aleph} , g_{\aleph} 为指定区域的规格化后的断裂能, $g_{\aleph} = G_{\aleph} / l_{\aleph}$, l_{\aleph} 特征长度(Lubliner et al. 1989; Oliver 1989)。为了能够得到结构层次上的结果, l_{\aleph} 应当是客观值或假定为材料某一性质。受压破坏时的断裂能的与材料性质是否具有对应关系仍然没有达成统一共识(Chen 1994)。

通过将 (19) 式代入到 (23) 式, 得:

$$g_{\aleph} = \frac{f_{\aleph 0}}{b_{\aleph}} \left(1 + \frac{a_{\aleph}}{2}\right) \quad (24)$$

合并 (19) 式和 (22) 式, 得出由 κ_{\aleph} 表示的单轴应力:

$$\sigma_{\aleph} = f_{\aleph}(\kappa_{\aleph}) \quad (25a)$$

$$\sigma_{\aleph} = \frac{f_{\aleph 0}}{a_{\aleph}} [(1 + a_{\aleph}) \sqrt{\Phi_{\aleph}(\kappa_{\aleph})} - \Phi_{\aleph}(\kappa_{\aleph})] \quad (25b)$$

其中 $\Phi_{\aleph} = 1 + a_{\aleph}(2 + a_{\aleph})\kappa_{\aleph}$ 。同样的, 还可得到由 κ_{\aleph} 表示的的有效应力和退化损伤变量:

$$\bar{\sigma}_s = \bar{f}_s(\kappa_s) \quad (26a)$$

$$\bar{\sigma}_s = f_{s0} \left[\left(\frac{1}{a_s} \right) (1 + a_s - \sqrt{\Phi_s(\kappa_s)}) \right]^{[1-(d_s/b_s)]} \sqrt{\Phi_s(\kappa_s)} \quad (26b)$$

$$D_s = 1 - \left[\left(\frac{1}{a_s} \right) (1 + a_s - \sqrt{\Phi_s(\kappa_s)}) \right]^{(d_s/b_s)} \quad (27)$$

为了模拟拉、压卸载的不同损伤状态, 式(8)中的损伤变量 \mathbf{k} 可以用 κ_t 和 κ_c 分别定义。 \mathbf{k} 是独立的状态变量: $\mathbf{k} = [\kappa_t \ \kappa_c]$ 。

从(22)式和(25)式, 得出单轴状态的损伤演化方程式

$$\dot{\kappa}_s = \frac{1}{g_s} f_s(\kappa_s) \dot{\varepsilon}^p \quad (28)$$

为了将单轴的损伤演化方程应用到多维情况, 假定式(28)中的塑性应变率 $\dot{\varepsilon}^p$ 通过下式进行三维情况下的计算

$$\dot{\varepsilon}^p = \delta_{in} r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \dot{\varepsilon}_{\max}^p + \delta_{cn} (1 - r(\hat{\boldsymbol{\sigma}})) \dot{\varepsilon}_{\min}^p \quad (29)$$

其中 δ 为克罗内克符号; $\dot{\varepsilon}_{\max}^p$ 和 $\dot{\varepsilon}_{\min}^p$ 分别是塑性应变张量 $\dot{\varepsilon}^p$ 的特征值中代数最大值和最小值。标量 $r(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ 为权重, $0 \leq r \leq 1$, 定义如下:

$$r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \begin{cases} 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \\ \frac{(\sum_{i=1}^3 \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i \rangle)}{(\sum_{i=1}^3 |\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i|)} & \text{其它} \end{cases} \quad (30)$$

其中形如 $\langle x \rangle$ 的函数定义如下: $\langle x \rangle = (|x| + x)/2$ 。将(29)式代入到(28)式中得出演化方程式的形式如下:

$$\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{k}) \dot{\varepsilon}^p \quad (31)$$

其中

$$\mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) f_t(\kappa_t) / g_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - r(\hat{\boldsymbol{\sigma}})) f_c(\kappa_c) / g_c \end{bmatrix}$$

$\mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{k})$ 为矩阵形式。对于特征值矩阵 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, 假定对角元素是代数规则下的特征值。式(6)中的本构模型流动法则可以修改为 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ 的形式

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \Phi(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (32)$$

将(32)式代入到(31)式, 可以得到形式上类似于(8)式的一个损伤演化方程式:

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \lambda \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (33)$$

其中 $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{h} \cdot \nabla_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \Phi(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ 。

率无关性塑性

像混凝土和岩石这种摩阻型材料的屈服函数[见 (15) 式]可以被改写为

$$\bar{F}(\boldsymbol{\sigma}) - c = 0 \quad (34)$$

其中 c 为内聚力; \bar{F} 为一个应力张量不变量的标量函数。为了使屈服面对于混凝土来说更真实, 许多模型包括参数: $J_3 = 1/3 s : s : s$, 或者包括 Lode 角, 以及 $I_1 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma}$ 和 $J_2 = 1/2 s : s$ (Chen 1994), 其中 s 为偏应力偏量。在 Barcelona 模型中, 采用最大主应力 $\hat{\sigma}_1$ (代数值) 来代替 Lode 角。利用该规则给出了一个屈服函数, 此函数能够更好的表示在拉、压区不同的力学行为。Barcelona 模型中的屈服函数为:

$$\bar{F} = \frac{1}{1-\alpha} (\alpha I_1 + \sqrt{3J_2} + \beta \langle \hat{\sigma}_{\max} \rangle) \quad (35)$$

其中 α 和 β 为无量纲的常数; $\hat{\sigma}_{\max}$ 最大主应力 (代数值)。图 1 展示了在主应力空间, 平面应力作用下的屈服面。

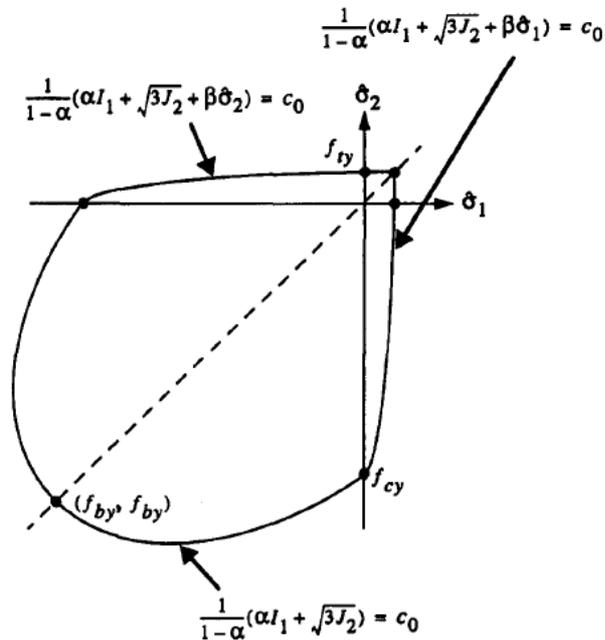


FIG. 1. Lubliner (1989) Yield Function in Plane Stress Space

(35) 式中的参数已被给定, 因此屈服函数能够精确的描述试验数据。在原模型中, 平面应力条件下采用三个独立的材料强度来计算参数 α , β : (1) 初始内聚力 c_0 : 假定单轴压缩加载状态 $c_0 = -f_{c0}$, 其中 f_{c0} 为初始单轴屈服压应力; (2) 通过考虑双轴初始屈服压应力 f_{b0} , 同时考虑 f_{c0} 的共同作用, 则参数 α :

$$\alpha = \frac{f_{b0} - f_{c0}}{2f_{b0} - f_{c0}} \quad (36)$$

其中 $0 \leq \alpha < 0.5$; (3) 单轴初始屈服拉应力 f_{t0} , 通常假定和最大抗拉强度一样大, 同时考虑 f_{c0} 的共同作用, 则参数 β

$$\beta = \frac{f_{c0}}{f_{t0}}(\alpha - 1) - (\alpha + 1) \quad (37)$$

双轴抗拉强度依赖于 α 和 β , 通常他比单轴抗拉强度略小 (大约 1.3%)。

在 Barcelona 模型中, 内聚力 c 仅是一个代表材料强度的变量, 并且损伤变量只影响内聚力 c 。因此 (34) 式可以表述为

$$\bar{F}(\boldsymbol{\sigma}) = c(\boldsymbol{\kappa}) \quad (38)$$

方程式 (38) 模拟了经典塑性力学中各向同性的硬化行为, 对于单调加载能够得到较好的结果。(38) 式不能模拟循环荷载下的混凝土的力学行为, 因为一个强度的演化几乎不能影响其他的强度, 因此, 用两个内聚力变量是必要的。通过定义 β , 可以得到采用两个内聚力变量的屈服函数如下式, 在 Barcelona 模型中 β 是一个常数:

$$\beta = \beta(\boldsymbol{\kappa}) \quad (39a)$$

$$\beta = \frac{c_c(\boldsymbol{\kappa})}{c_t(\boldsymbol{\kappa})}(\alpha - 1) - (\alpha + 1) \quad (39b)$$

$$c = c_c(\boldsymbol{\kappa}) \quad (39c)$$

其中 c_t 为拉伸内聚力; c_c 为压缩内聚力。假定内聚力和损伤变量之间有如下关系式, $c_t = \bar{f}_t(\boldsymbol{\kappa}_t)$ 和 $c_c = -\bar{f}_c(\boldsymbol{\kappa}_c)$, 式 (15) 中的屈服函数变为:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{1-\alpha} [\alpha I_1 + \sqrt{3J_2} + \beta \langle \hat{\sigma}_{\max} \rangle] - c_c(\boldsymbol{\kappa}) \quad (40)$$

其中应力不变量是有效应力的函数。

流动法则给出了塑性应变增量的方向和塑性应变改变率的大小。与金属材料形成对比, 非相关联流动法则对解释摩阻型材料模型的剪胀性现象是十分必要的 (Chen and Han 1988)。由于式 (40) 中的屈服面是来自两个不同的 Drucker-Prager 形函数的几何形状的合并。在现有的模型中, Drucker-Prager 形函数用作塑性势函数。

$$\Phi = \sqrt{2J_2} + \alpha_p I_1; \quad \Phi = \|s\| + \alpha_p I_1 \quad (41a-b)$$

其中 $\|s\| = \sqrt{s:s}$ 表示应力偏量。参数 α_p 用来考虑适当的简胀性。由 (6) 式和 (41) 式可以得到塑性应变率:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \left(\frac{\boldsymbol{S}}{\|\boldsymbol{S}\|} + \alpha_p \mathbf{I} \right) \quad (42)$$

刚度退化和试验验证

从实验结果我们得知, 混凝土在拉伸或压缩作用下, 刚度从微裂缝出现时就开始退化, 并且当应变增加的时候变得十分重要。在循环荷载作用下, 由于微裂缝的扩展和闭合, 刚度退化的机理变得较为复杂。从拉伸状态到压缩状态的卸载过程中, 裂缝的扩展和闭合行为可以通过弹性刚度恢复来模拟。式 (12) 中定义的刚度损伤变量 D_t 通过乘以一个参数 s 进行修正, $0 \leq s \leq 1$

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\kappa}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = 1 - (1 - D_c(\boldsymbol{\kappa}))(1 - s(\bar{\boldsymbol{\sigma}})D_t(\boldsymbol{\kappa})) \quad (43)$$

参数 s 代表刚度的恢复, s 表示如下

$$s(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = s_0 + (1 - s_0)r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (44)$$

其中 $0 \leq s_0 \leq 1$, 是一个常数, 是 s 的最小值。注意 $r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = r(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$, 将 (43) 式代入到 (5) 式中, 得到总应力

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D_c(\boldsymbol{\kappa}))(1 - sD_t(\boldsymbol{\kappa}))\mathbf{E}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (45)$$

(26) 和 (27) 中的比率 d_{κ} / b_{κ} 可以通过指定单轴状态的刚度退化来进行计算。为了校核压缩情况, 假定弹性刚度退化值 \bar{D}_c 可以在试验中最大压应力状态时获得。当有效单轴函数 \bar{f}_c 达到它的最大绝对值时, κ'_c 为压缩损伤值, 由 (25) 式可得

$$\sqrt{\phi(\kappa'_c)} = \frac{1 + a_c}{2} \quad (46)$$

通过将 (46) 式代入到 (27) 式可得

$$\bar{D}_c = 1 - \left[\left(\frac{1}{a_c} \right) \left(1 + a_c - \frac{1 + a_c}{2} \right) \right]^{d_c / b_c} \quad (47)$$

由此式可以得到 d_c / b_c 和 \bar{D}_c 之间的关系

$$\frac{d_c}{b_c} = \frac{\log(1 - \bar{D}_c)}{\log\left(\frac{1 + a_c}{2a_c}\right)} \quad (48)$$

对于拉伸情况, 方法有所不同, 因为在最大拉伸状态时的刚度退化通常为 0。假定单轴状态的退化值记为 \bar{D}_t 时, $\sigma_t = f_{t0} / 2$, 然后由式 (25) 得

$$\sqrt{\phi(\kappa'_t)} = \frac{1 + a_t + \sqrt{1 + a_t^2}}{2} \quad (49)$$

将 (49) 式代入到 (27) 式可得

$$\frac{d_i}{b_i} = \frac{\log(1 - \tilde{D}_i)}{\log\left[(1 + a_i) - \sqrt{1 + a_i^2}\right] - \log(2a_i)} \quad (50)$$

由于 a_i 不是材料性质, 可以通过测量得到, 所以将 a_i 作为 d_i/b_i 和 \tilde{D}_i 的函数并进行计算是十分方便的。

$$a_i = \frac{[2(1 - \tilde{D}_i)^{b_i/d_i} - 1]}{2(1 - \tilde{D}_i)^{b_i/d_i} [(1 - \tilde{D}_i)^{b_i/d_i} - 1]} \quad (51)$$

应用

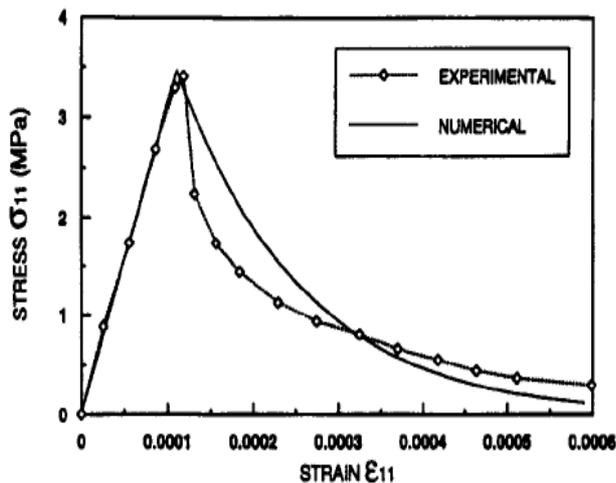
现有模型已有一个有效的数值算法(Lee 1996), 它作为有限元程序 FEAP(Taylor 1992)的一部分得以执行, 连续切线刚度算法(Lee 1996)被 Newton-Raphson 方法(Simo and Taylor 1985, 1986)用在一致性刚度算法中, 来解决非线性方程的二次收敛问题。在这里将展示几个用混凝土塑性损伤模型计算的数值算例。使用二维、平面应力四边形单元, 用位移控制加载, 所有情况下的泊松比均为 0.18。

单调轴向加载实验

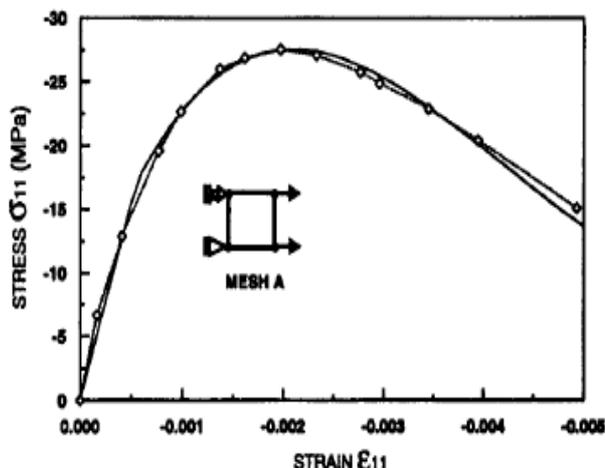
为了比较现有的率无关性塑性损伤模型和已有的实验结果(Karsan and Jirsa 1969; Gopalaratnam and Shah 1985), 将采用以下材料参数: (1) 拉伸情况: $E_0=3.1 \times 10^4 \text{MPa}$, 抗拉强度 $f'_t=3.48 \text{MPa}$, $G_t=40 \text{N/m}$, $l_t=82.6 \text{mm}$, $\alpha_p=0.2$, $\tilde{D}_t=0.5$; (2) 压缩情况: $E_0=3.17 \times 10^4 \text{MPa}$, 抗压强度 $f'_c = -27.6 \text{MPa}$, $G_c=5690 \text{N/m}$, $l_c=82.6 \text{mm}$, $\alpha_p=0.2$, $\tilde{D}_c=0.4$ 。图 2 展示了模拟拉伸和压缩的应力应变曲线, 使用一个单元(网格 A; $82.6 \times 82.6 \text{mm}$), 模拟结果和实验数据都吻合较好。值得注意的是, 在规定的有效试样尺寸 (82.6mm) 之外的平均应变将再现实验结果。

在图 2 (a) 中, 试验数据曲线中有一个很陡峭的后峰, 这是因为应变是在局部区域内一个较宽的范围得到。如果在一个小范围内的局部区域内考虑平均应力-应变关系, 那么极限应力后正切刚度 (负数) 的绝对值在将减小。若像拉伸试验结果中如此之大的负刚度, 数值模拟模型将不能屈服, 因为它假设的应力曲线是由两个指数函数相减得到的 (见式 (19))。

类准脆性材料, 比如土、岩石、混凝土, 众所周知都会由于较大的非弹性应变而产生明显的体积变化 (剪胀性)。而这样的剪胀性可以用数值模型来模拟。在塑性势函数中, 剪胀性是由参数 α_p 决定的。考虑到屈服函数中 α_p 容许范围和其他参数取值, Lee (1996) 在算例中实际取 $\alpha_p=0.2$ 。



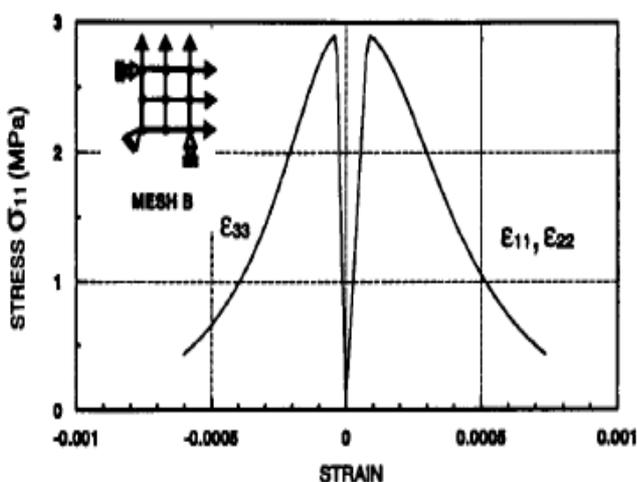
(a) 拉伸情况(Gopalarantnamand Shah 1985)



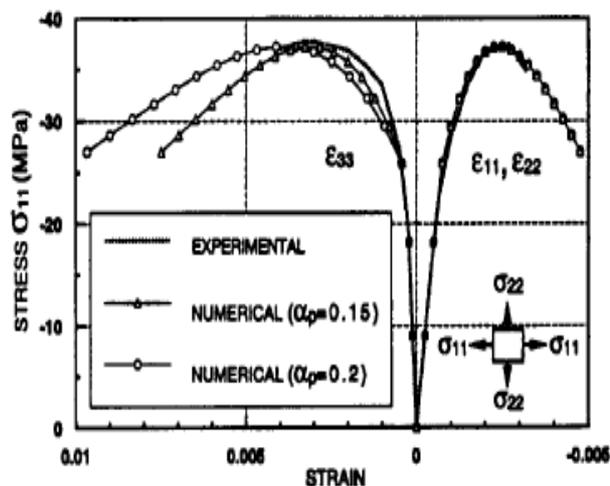
(b) 压缩情况(Karsen and Jlrse 1969)

图 A-2. 单轴加载的数值解与实验值的对比

双轴荷载试验



(a) 拉伸情况(Gopalarantnamand Shah 1985)



(b) 压缩情况(Kupfer et al. 1969)

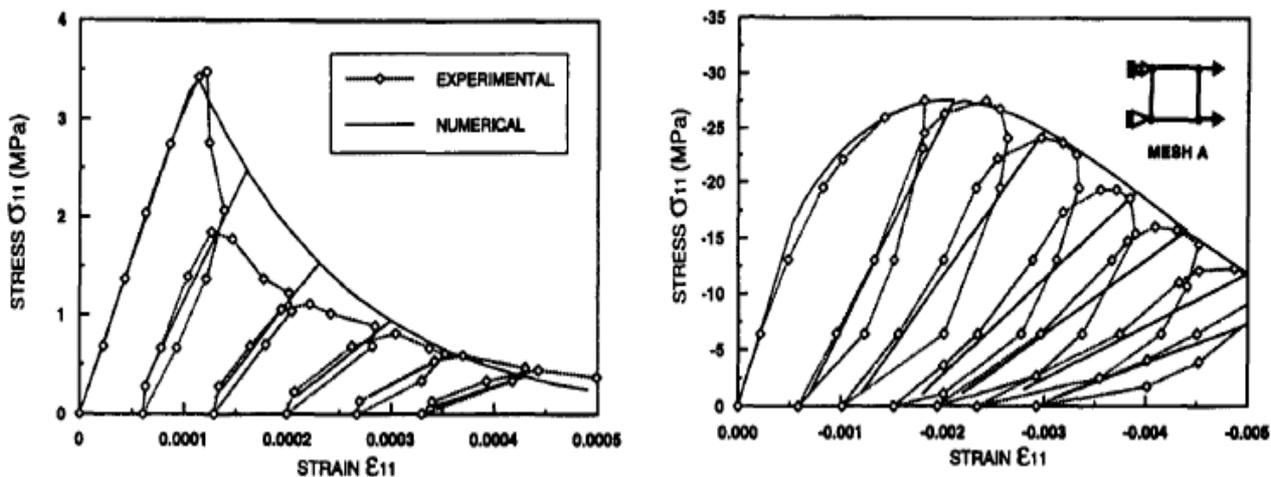
图 A-3. 多轴加载的数值解与实验值的对比

在这里用一个四元的网格（网格 B；82.6×82.6mm）来进行双轴荷载模型试验的模拟，其材料参数与单轴试验相同。双轴拉伸和压缩荷载的试验结果分别见图 3（a 和 b），图中描绘了典型的双轴荷载试验结果。在压缩试验中采用了两个不同的 α_p 值(0.15 和 0.2)，分别和试验值(Kupfer 等. 1969)做对比分析。当 $\alpha_p=0.15$ 时，模拟结果和试验值吻合良好；而 $\alpha_p=0.2$ 时，由于较大筒胀性引起的平面外应变而使模拟结果与实验值略有不同。

循环荷载试验

在这里采用网格 A (82.6×82.6mm) 来模拟循环荷载试验, 模拟结果与试验值(Gopalaratnan and Shah 1985)的对比可见图 4(a)。网格 A 除了 $E_0=3.17\times 10^4$ MPa, 材料的其他参数与前述相同。图 4.b 为模拟结果和试验值的比较 (Karsan and Jirsa 1969), 它们都把卸载/加载循环中的刚度退化现象模拟为软化行为。而由于率无关弹性假定的存在, 该模型并不能模拟再加载过程的滞后现象。

在第三种单轴循环荷载试验中, 网格 A (50×50mm) 施加循环的拉力和低压力荷载, 其材料参数与之前的取值也有所不同, 因为这种试验材料的杨氏模量非常大 (Reinhart 1984)。其中 $E_0=3.17\times 10^4$ MPa, $f_t'=3.2$ MPa, $f_c'=-40$ MPa, $G_t=45$ N/m, $G_c=450$ N/m, $l_t=50$ mm, $l_c=50$ mm, $\alpha_p=0.2$, $\tilde{D}_t=0.8$, $\tilde{D}_c=0.5$, 如图 5 所示。在循环的拉力-低压力荷载作用下, 模拟结果与试验值吻合良好。其微裂缝的扩展与闭合可由退化函数模拟。用一个连续的模型来模拟这样一个离散的现象必然存在着一定的限制, 因此最后一步循环荷载时的刚度迅速恢复现象也很难用现有的塑形破坏模型来精确模拟。总的来说, 循环拉荷载-压荷载下模型的响应值和已有试验值还是很接近的。



(a) 拉伸情况(Gopalaratnam and Shah 1985)

(b) 压缩情况(Karsan and Jirsa 1969)

图 A-4. 循环单轴加载的数值解与实验值的对比

在最后一个循环荷载的试验中, 网格 A (82.6×82.6mm) 施加了大拉力-大压力的充分循环荷载。它的材料参数如下: $E_0=3.1\times 10^4$ MPa, $f_t'=3.3$ MPa, $f_c'=-30$ MPa, $G_t=60$ N/m, $G_c=6000$ N/m, $l_t=82.6$ mm, $l_c=82.6$ mm, $\alpha_p=0.2$, $\tilde{D}_t=0.7$, $\tilde{D}_c=0.4$ 。其结果见图 6, 其中加载路径为 O-A-B-C-D-E-F-G。在拉力卸载-压力加载路径上 (A-B 和 D-E), 刚度恢复现象可以得到体现。其抗压强度在施加拉力之后并没有退化 (见 A-B-C), 说明受压破坏对屈服面的影响较大以及受拉破

坏对弹性刚度的影响不大。而另一方面, 抗拉强度则取决于抗压强度的大小, 因为由受压破坏所累计产生的刚度退化并没有在拉力卸载期间 (C-D) 得到恢复。而这在物理上也是解释得通的, 因为受压破坏主要是由筒胀性引起的, 而筒胀性则同时影响着受拉、受压强度。同时, 这也说明了只有在拉裂缝闭合时才会产生刚度恢复现象。

图 6 的加载路径和图 4 (b) 中的滞回曲线相似, 因为能量在拉力再加载期间 (C-D-E) 得到了消散。而这表明, 现有的模型可以模拟类准脆性材料在循环荷载下的行为, 这是由于滞回曲线中的拉力区域与压力区域相比可以忽略不计。

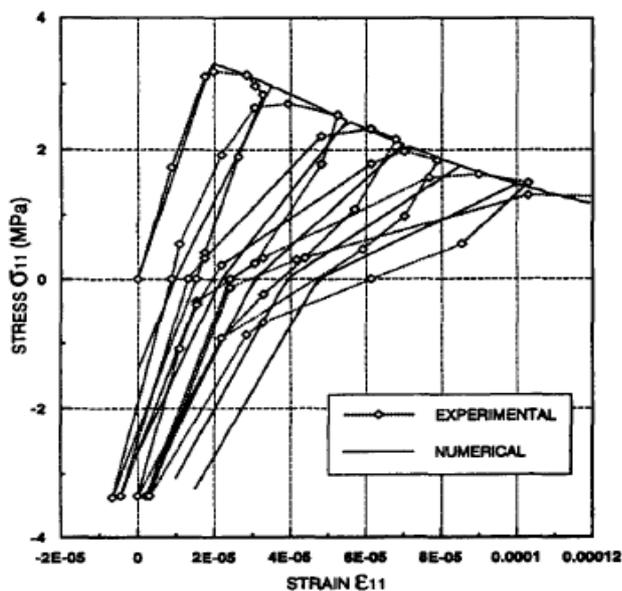


图 A-5. 循环加载的数值解与实验值对比(Reinhart 1984)

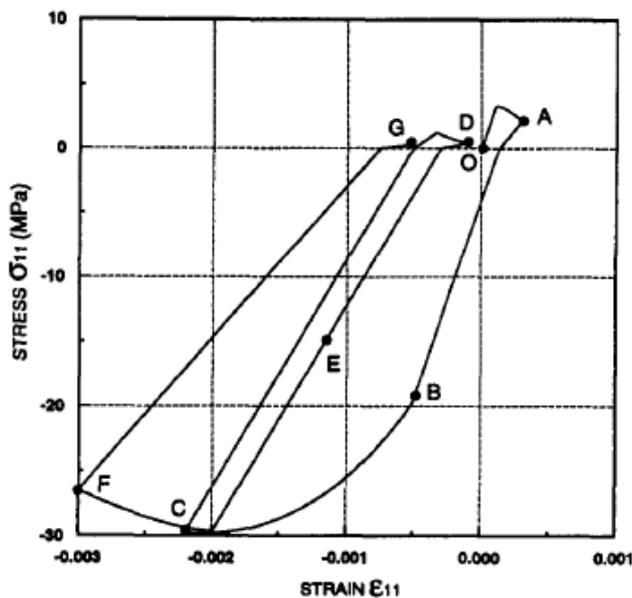


图 A-6. 全循环的数值解路径(O-A-B-C-D-E-F-G)

网格敏感性试验

数值计算对单元尺寸的敏感性可用于检验特征长度(Oliver 1989)对于网格的客观性的影响。为了检验划分网格的敏感性, 试件尺寸相同 (50.8×25.4mm), 但单元尺寸划分不同(网格 C、D 和 E), 模拟结果见图 7。其中材料的参数除了特征长度外均与单调轴向加载实验中的参数相同, 其中特征长度因单元尺寸不同而不同 (网格 C, 25.4mm; 网格 D, 12.7mm; 网格 E, 6.35mm)。为了防止应力局部化, 左端的单元施加的拉力较小。

图 7 所示为右端的荷载—位移曲线。尽管左端的单元经受了应力局部化, 但是其它的单元在达到峰值应力仍可弹性卸载。因为软化区域的带宽和弹性卸载区域的长度的比值在三种网格中是不同的, 所以全局的荷载—位移曲线必然不同, 尽管三种网格的耗散能都是相等的。但是, 当全局响应达到一个定的限度后, 软

化区域的带宽也将变小。

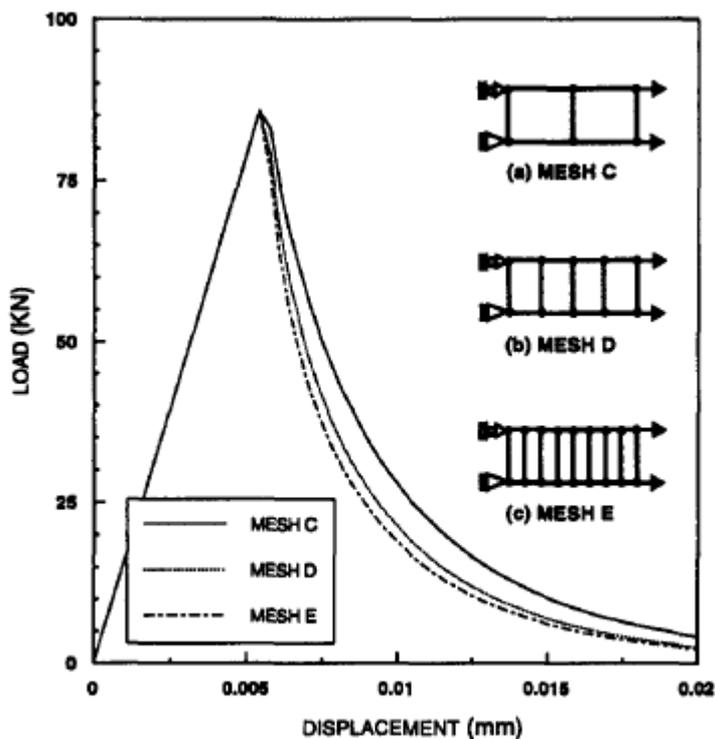


图 A-7. 不同网格的力-位移曲线

结论

本文基于塑性和连续损伤力学建立了一个新的混凝土塑性损伤本构模型。其中断裂能和多重硬化被分别用于表征拉伸和压缩损伤。弹塑性响应可完全采用有效应力和损伤变量来描述，这可以使有效应力的计算和退化评估解耦。模拟刚度退化和恢复时可采用热力学的一致性标量模型。

通过上述例子可看出，不论是混凝土在循环荷载还是单调荷载作用下，采用本文建立的塑性损伤模型建模，数值模拟结果和试验数据吻合良好。由裂缝扩展和闭合所引起的刚度退化和恢复也能得到恰当的模拟。这都说明利用本文建议的和塑性相结合的公式来模拟混凝土行为的方法既简单又有效。该模型同样对剪胀性有良好的控制，这对模拟混凝土结构的多轴试验模拟是非常重要的。因此，本文建立的塑性损伤模型可以准确地模拟混凝土结构在单调和循环荷载下的行为。

率无关性方程在处理软化问题时会产生一个不适定的初边值问题 (Hill 1958; Needleman 1988; de Borst et al. 1993; Neilsen and Schreyer 1993)。因此，解的唯一性实际上是得不到保证的。不稳定性导致的另一个问题就是有限元分析中的网格敏感性问题。在数值模拟中特征长度的概念可用于保持数值解的客观性。值得注意的是，非相关联流动法则是不稳定性的另一个原因，而这种不稳定性可以通

过在塑性势函数中选择合适的参数来避免(Runesson and Mroz 1989; Neilsen and Schreyer 1993)。

附录 A-1. 热力学的注意事项

热力学第一定律可表示为:

$$\dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho h \quad (52)$$

其中 e : 单位体积内能; \mathbf{q} : 热流矢量; ρ : 密度; h : 内能的质量密度。根据假设内能将分为两部分, 显式的内能, 表示为 e_e ; 隐式的内能, 表示为 e_i 。

$$e = e_e + e_i; \quad \dot{e} = \dot{e}_e + \dot{e}_i \quad (53a-b)$$

显式的部分其实就是经典方法中内能本身。隐式的部分则是用来解释热力学检测中的刚度恢复现象。可以认为隐式内能所占的比例使得一部分的应力功率得到平衡。

$$\dot{e}_i = \omega \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (54)$$

其中 $0 \leq \omega \leq 1$

单位体积亥姆霍兹自由能可用 e_e 定义如下

$$\Psi = e_e - \rho \eta \theta \quad (55)$$

其中 η =单位质量熵; θ =绝对温度, 将 (55) 式对时间微分, 将 (53) 代入有:

$$\dot{\Psi} = \dot{e} - \dot{e}_i - \rho \dot{\eta} \theta - \rho \eta \dot{\theta} \quad (56)$$

将 (54) 代入 (56) 后, (52) 可表示为

$$\rho h = \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho \dot{\eta} \theta + \rho \eta \dot{\theta} + \dot{\Psi} - (1 - \omega) \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (57)$$

将 (57) 代入 Clausius-Duhem 不等式表示的热力学第二定律, 有:

$$-\dot{\Psi} - \rho \dot{\eta} \theta + (1 - \omega) \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{\theta} (\mathbf{q} \cdot \nabla \theta) \geq 0 \quad (58)$$

在连续损伤力学中, 损伤材料的亥姆霍兹自由能可表示为:

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\kappa}, d, \theta); \quad \Psi = (1 - \tilde{d}) \Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\kappa}, \theta) \quad (59)$$

其中, Ψ_0 表示材料刚度未退化损伤时的总势能函数, \tilde{d} 表示弹性刚度中的不可恢复的损伤, 在现有模型中有 $\tilde{d} = 1 - (1 - D_l)(1 - D_e)$ 。注意 \tilde{d} 是一个非负数, 说明损伤这个过程是不可恢复的。在等温情况下, 假设 $\eta = -(1/\rho)(\partial \Psi / \partial \theta)$, 通过链式法则与 (52), (58) 式可化简为:

$$\left[(1-\omega)\boldsymbol{\sigma} - (1-\tilde{d})\frac{\partial\Psi_0}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e} \right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + (1-\omega)\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - (1-\tilde{d})\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial\boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}\right) + \dot{\tilde{d}}\Psi_0 \geq 0 \quad (60)$$

在(60)中, 由塑性势函数的是凸函数, 则有 $(1-\omega)\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \geq 0$; 因为 $\dot{\tilde{d}}$ 和 Ψ_0 非负有 $\dot{\tilde{d}}\Psi_0 \geq 0$ 。因此, 为了满足(60), 如下的式子是充分条件:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{1-\tilde{d}}{1-\omega} \right) \frac{\partial\Psi_0}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (61)$$

$$\frac{\partial\Psi_0}{\partial\boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \leq 0 \quad (62)$$

假设现有模型中的 Ψ_0 满足如下关系, 则(61)中定义的应力与(45)中的相同:

$$\Psi_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \Psi_0^p(\boldsymbol{\kappa}) + \Psi_0^t(\theta) \quad (63)$$

其中 Ψ_0^p 为损伤变量(在经典塑性环境下为硬化变量)对 Ψ_0 和 $\omega = (1-s)D_t / (1-sD_t)$ 的贡献。需注意的是, 由于 $0 \leq \omega \leq 1$, 所以 $\dot{\varepsilon}_i$ 总是比力学的输入功率, 即应力功率要小。在拉伸和压缩损伤过程中的耗散能与有效应力的关系可用来定义 Ψ_0^p :

$$\Psi_0^p(\boldsymbol{\kappa}) = g_t + g_c - \left(\int_0^{\kappa_t} c_t(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa} + \int_0^{\kappa_c} c_c(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa} \right) \quad (64)$$

因为 $(\partial\Psi_0 / \partial\boldsymbol{\kappa}) = (\partial\Psi_0^p / \partial\boldsymbol{\kappa})$, κ_t 和 κ_c 是单调递增函数, 所以(62)中的条件可变为:

$$\frac{\partial\Psi_0}{\partial\boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} = -(c_t \dot{\kappa}_t + c_c \dot{\kappa}_c) \leq 0 \quad (65)$$

上式说明现有的塑性损伤模型符合热力学一致性。