

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 混凝土的三轴强度准则

江见鲸 陆新征  
清华大学土木系  
2005

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 强度准则的定义

- 破坏
  - 开裂, 屈服, 极限强度.....
- 强度准则: 极限强度
- 单轴拉力, 压力和剪力强度不足以反映混凝土破坏强度的普遍情况
- 混凝土的强度准则是建立混凝土空间坐标破坏曲面的规律

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

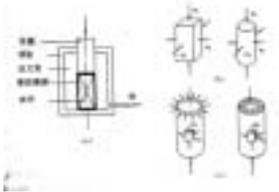
## 三轴试验机

- 常三轴试验
- 真三轴试验



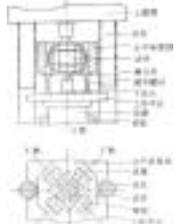
清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 常三轴试验机



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 真三轴试验机



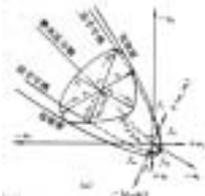
清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 混凝土破坏面的描述

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0$$

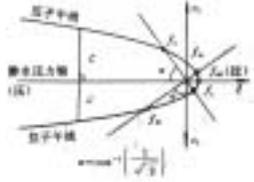
$$f(\xi, \rho, \theta) = 0$$

$$f(\sigma_{oct}, \tau_{oct}, \theta) = 0$$


清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 混凝土破坏曲面的特征

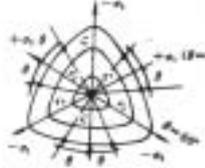
- 子午线



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 混凝土破坏曲面的特征(续)

- 偏平面



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 应力不变量之间的关系

参数	符号	关系
主应力	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	
主应力偏差	$S_1, S_2, S_3$	$s_i = \sigma_i - \frac{I_1}{3}$
应力不变量	$I_1, I_2, I_3$	$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$
应力偏差不变量	$J_1, J_2, J_3$	$J_1 = \frac{I_2}{3}, J_2 = \frac{3I_3 - I_1 I_2}{27}, J_3 = \frac{I_1 I_2 I_3}{27} - I_1 J_1$
几何参数	$\xi, \rho, \theta$	$\xi = \frac{I_2}{I_1}, \rho = \sqrt{I_2}, \theta = \frac{1}{3} \arccos \frac{\sqrt{3} J_3}{I_1 \rho}$
八面体应力	$\sigma_{oct}, \tau_{oct}$	$\sigma_{oct} = \frac{I_1}{3}, \tau_{oct} = \sqrt{\frac{J_2}{3}}$
平均应力	$\sigma_m, \tau_m$	$\sigma_m = \frac{I_1}{3}, \tau_m = \sqrt{J_2}$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 离散模型---ADINA

①① Determination of  $\tau_1$  from given  $\sigma_1$ ,  $\tau_1$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 混凝土强度准则模型

- 分类
- 按来源
  - 借用古典强度理论
  - 试验回归
  - 纯数学推导
- 按参数个数
  - 单参数.....五参数模型

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 古典强度理论

- 最大拉应力准则(Rankine强度准则)
- 剪应力强度准则(Tresca & Von Mises)
- 莫尔库仑强度准则
- Drucker-Prager强度准则

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 最大拉应力准则

$\sigma_1 = f_t$

$f(I_1, J_2, \theta) = 2\sqrt{3}J_2 \cos\theta + I_1 - 3f_t = 0$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## Tresca强度准则

$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = K$

$f(J_2, \theta) = \sqrt{J_2} \sin(\theta + \pi/3) - K = 0$

$f(\rho, \theta) = \rho \sin(\theta + \pi/3) - \sqrt{2}K = 0$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## Von Mises强度准则

$f(J_2) = J_2 - K^2 = 0$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 比较

Rankine 强度准则  
Tresca 强度准则  
Von Mises 强度准则

$f(I_1, J_2, \theta) = 2\sqrt{3}J_2 \cos\theta + I_1 - 3f_t = 0$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

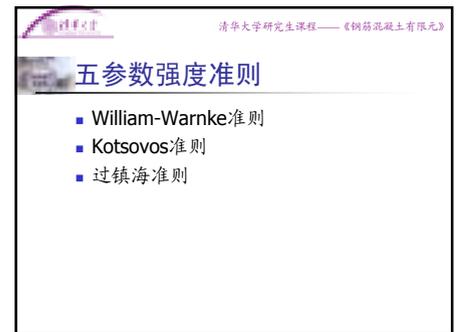
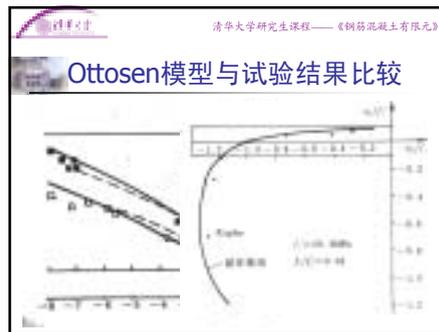
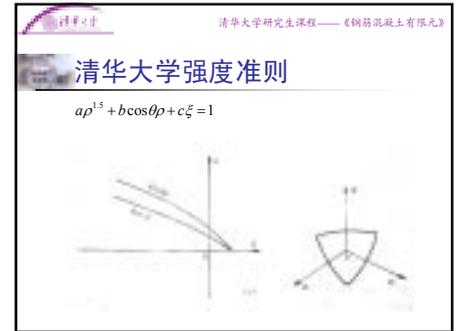
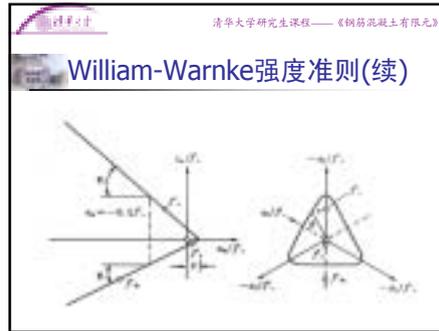
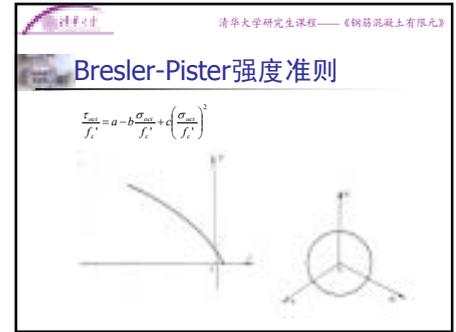
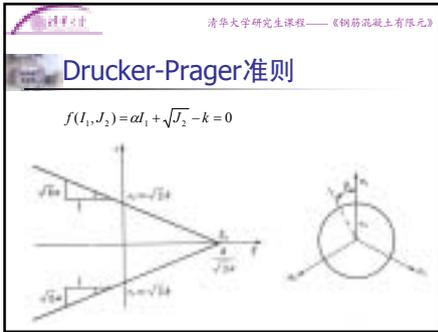
## 莫尔库仑强度准则

$|\tau| = c - \sigma \tan \phi$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 莫尔库仑强度准则(续)

$f(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3}I_1 \sin\theta + \sqrt{J_2} \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) \sin\theta - c \cos\theta = 0$



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## William-Warnke准则

$$\sigma_1 \leq \sigma_c \left[ \frac{2\sigma_2^2 - \sigma_3^2 + 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}{3\sigma_c^2} + \frac{2\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2 + 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}{3\sigma_c^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_2 \leq \sigma_c \left[ \frac{2\sigma_1^2 - \sigma_3^2 + 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}{3\sigma_c^2} + \frac{2\sigma_2^2 - \sigma_1^2 - \sigma_3^2 + 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}{3\sigma_c^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_3 \leq \sigma_c \left[ \frac{2\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2 + 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}{3\sigma_c^2} + \frac{2\sigma_3^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 + 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}{3\sigma_c^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$f_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - c$$

$$f_2 = \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_1 - c$$

$$f_3 = \sigma_3$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## WW准则与准则的关系

- $a_0=b_0, a_1=b_1, a_2=b_2=0$  Von Mises
- $a_0=b_0, a_1=b_1, a_2=b_2=0$  D-P
- $a_0/b_0=a_1/b_1, a_2=b_2=0$  WW三参数
- 参数标定办法

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## WW参数标定办法

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## Kotsovos五参数模型

$$\frac{\tau_{oct}}{f_c'} = 0.944 \left( \frac{\sigma_{oct}}{f_c'} + 0.05 \right)^{0.724} \quad \theta = 60^\circ$$

$$\frac{\tau_{oct}}{f_c'} = 0.633 \left( \frac{\sigma_{oct}}{f_c'} + 0.05 \right)^{0.857} \quad \theta = 0^\circ$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 过镇海五参数模型

$$\tau_{oct} = a \left( \frac{b - \sigma_{oct}}{c - \sigma_{oct}} \right)^d = 6.9638 \left( \frac{0.09 - \sigma_{oct}}{c - \sigma_{oct}} \right)^{0.9297}$$

$$c = 12.2445(\cos 1.50)^{13} + 7.3319(\sin 1.50)^2$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 过镇海五参数准则与试验比较

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 双剪应力强度准则

$$f_3 = \tau_{13} + \tau_{12} - c = 0 \quad \text{if } \tau_{12} \geq \tau_{23}$$

$$f_3' = \tau_{13} + \tau_{23} - c = 0 \quad \text{if } \tau_{12} \leq \tau_{23}$$

$$f_1 = \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) - c = 0 \quad \text{if } \sigma_2 \leq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$f_1' = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 - c = 0 \quad \text{if } \sigma_2 \geq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 双剪应力强度准则示意图

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 破坏强度准则的比较与评价

- 偏平面比较

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 破坏强度准则的比较与评价

- 子午线比较

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

## 破坏强度准则的比较与评价

- 二轴应力比较

