非线性弹性三维本构关系

江见鲸 陆新征
清华大学土木工程系
2004

空间应力应变关系

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{bmatrix}\qquad [\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx}\end{bmatrix}\qquad [\sigma]=[D][\varepsilon]$$

弹性本构矩阵－E υ形式

$$D_e=\frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\times\begin{bmatrix}(1-\nu)E_0 & \nu E_0 & \nu E_0 & 0 & 0 & 0\\ & (1-\nu)^t E_0 & \nu E_0 & 0 & 0 & 0\\ & & (1-\nu)E_0 & 0 & 0 & 0\\ & \text{sym} & & 0.5(1-2\nu)E_0 & 0 & 0\\ & & & & 0.5(1-2\nu)E_0 & 0\\ & & & & & 0.5(1-2\nu)E_0\end{bmatrix}$$

弹性本构矩阵－$K\ G$形式

$$D=\begin{bmatrix}K+\frac{4}{3}G & K-\frac{2}{3}G & K-\frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0\\ & K+\frac{4}{3}G & K-\frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0\\ & & K+\frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0\\ & \text{sym} & & G & 0 & 0\\ & & & & G & 0\\ & & & & & G\end{bmatrix}$$

$$K=\frac{E}{3(1-2\nu)}\qquad E=\frac{9KG}{2K+G}$$

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}\qquad \nu=\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$$

混凝土三维本构模型的核心

- 混凝土的应力应变关系，主要是建立在一维情况下
- 寻找合适的指标，将一维的应力应变关系拓展到三维
- 非线性指标：
  - 非线性弹性本构 β
  - 弹塑性本构 $\bar{\varepsilon}_{pl}$
  - 损伤力学本构 D

各种本构模型的本质差别

- 非线性弹性模型：主要（完全）依赖对试验数据的拟合和人为假设
- 弹塑性模型：用塑性力学解释非线性指标，控制其发展变化
- 损伤模型：用损伤力学解释非线性指标，控制其发展变化

非线性弹性模型的基本思路

- 将三维应力/应变归一化，寻找合适的应力/应变水平指标，以该指标为基础建立本构模型
  - Ottosen, 江见鲸模型，过镇海模型
- 在主应力空间里分别建立主应力－主应变的关系，然后用经验/假设方法确定本构矩阵的非对角项
  - ADINA, Darwin

非线性弹性模型的分类

- 全量形式模型
  - 采用割线模量
  - 简单
  - 难以模拟加卸载

$$\{^{t+\Delta t}\sigma\}=[D_s]\{^{t+\Delta t}\varepsilon\}=[D_s](\{^{t}\varepsilon\}+\{d\varepsilon\})$$

非线性弹性模型的分类

- 增量形式模型
  - 采用切线模量
  - 稍复杂
  - 可以模拟加卸载

$$\{^{t+\Delta t}\sigma\}=\{^{t}\sigma\}+\{d\sigma\}$$
$$=\{^{t}\sigma\}+[D_t]\{d\varepsilon\}$$

全量模型

- $K-G$模型
  - 分别建立K和G随应力/应变的变化关系
- $E-\upsilon$模型
  - 分别建立E和υ随应力/应变的变化关系

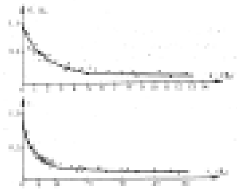
Cedolin 模型

$$\sigma_{oct}=3K_s\varepsilon_{oct}$$

$$\tau_{oct}=3G_s\gamma_{oct}$$

$$\frac{K_s}{K_0}=ab^{-\varepsilon_{oct}/c}+d$$

$$\frac{G_s}{G_0}=pq^{-\gamma_{oct}/v}+s\gamma_{oct}+t$$

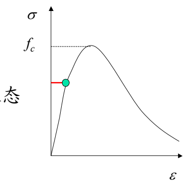


Ottosen模型

- 破坏准则
- 非线性指标
- 等效应力应变关系

非线性指标(Nonlinear Index)

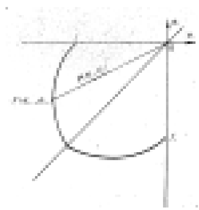
$$\beta=\frac{\sigma}{|f_c|}$$



- $\beta=1$ 处于破坏状态

二维非线性指标

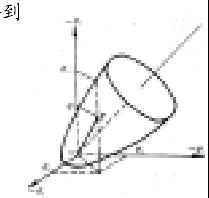
$$\beta=\frac{\sigma_2}{\sigma_{2f}}=\frac{\sigma_1}{\sigma_{1f}}=\frac{OP}{OF}$$



三维非线性指标：Ottosen法

- 保持σ_1, σ_2不变，改变σ_3直至与破坏面相交得到交点(σ_1, σ_2, σ_{3f})

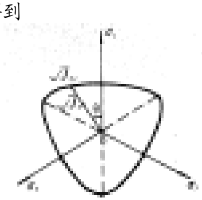
$$\beta=\frac{\sigma_3}{\sigma_{3f}}$$



三维非线性指标：$\sqrt{J_2}$ 法

- 保持I_1, θ不变，改变J_2直至与破坏面相交得到交点(I_1, J_{2f}, θ)

$$\beta=\frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{J_{2f}}}$$



三维非线性指标：比例增大法

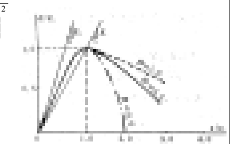
- 比例增大(σ_1, σ_2, σ_3)，直至与破坏面相交得到交点(σ_{1f}, σ_{2f}, σ_{3f})
- 引入调整系数k

$$\beta=\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_{3f}}\right)^k \qquad 0\le k\le 1$$

等效一维应力应变关系

- 采用Sargin表达式

$$\sigma=k_3f_c\frac{A\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)+(D-1)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2}{1+(A-2)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)+D\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2}$$



割线模量计算式

$$\beta=\frac{\sigma}{f_c}$$

$$E_s=\frac{\sigma}{\varepsilon}$$

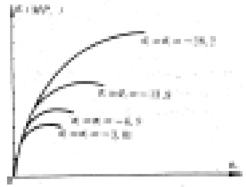
$$\beta\left[1+(A-2)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)+D\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2\right]=A\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)+(D-1)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{E_s}/\frac{f_c}{E_c}=\beta\frac{E_c}{E_s}$$

$$E_s=\frac{1}{2}E_0-\beta(\frac{1}{2}E_0-E_c)\pm\sqrt{\left[\frac{1}{2}E_0-\beta(\frac{1}{2}E_0-E_f)\right]^2+\beta E_c^2\left[D(1-\beta)-1\right]}$$

三维混凝土应力应变关系

- 峰值应力和应变都要增大



E_f取值

- 王传志公式

$$E_f=E_c(0.18-0.0015\theta+0.038\left|\frac{\sigma_{oct}}{f_c}\right|^{-1.75})$$

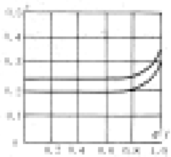
- Ottosen公式

$$E_f=\frac{E_c}{1+4\left(\frac{E_0}{E_c}-1\right)\left[\left(\frac{\sqrt{J_2}}{f_c}\right)_f-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]}\geq 0$$

割线泊松比计算

$$\nu_s=\nu_0 \qquad \text{if } \beta<\beta_a$$

$$\nu_s=\nu_f-(\nu_f-\nu_0)\sqrt{1-\left(\frac{\beta-\beta_a}{1-\beta_a}\right)^2} \qquad \text{if } \beta\geq\beta_a$$



本构矩阵计算步骤

- 已知
  - 混凝土强度，初始弹性模量和泊松比，单轴应力应变关系，破坏准则，当前应力水平
- 计算主应力
- 计算非线性指标
- 计算割线模量
- 计算割线泊松比
- 形成非线性本构矩阵

例题

- 已知:
  - 混凝土强度为f_c=20MPa，f_t=2MPa，初始弹性模量E_0=30GPa，泊松比为v_0=0.18
  - 一点应力状态为[-6 -6 -12 2 2 1]'，选用江见鲸四参数破坏准则，中国规范建议应力应变曲线
- 求
  - 当前的割线模量和泊松比

求主应力

$$I_1=-6-6-12=-24 \qquad \sigma_m=\frac{-24}{3}=-8$$

$$[s]=[2\quad 2\quad -4\quad 2\quad 2\quad 1]^T$$

$$J_2=-S_{11}S_{22}-S_{22}S_{33}-S_{11}S_{33}+S_{12}{}^2+S_{23}{}^2+S_{31}{}^2=21 \qquad \sqrt{J_2}=5.292$$

$$J_3=S_{11}S_{22}S_{33}+2S_{12}S_{23}S_{31}-S_{11}S_{23}{}^2-S_{22}S_{31}{}^2-S_{33}S_{12}{}^2=-2$$

$$\begin{cases} r=\sqrt{\frac{4J_2}{3}}=5.292 \\ \cos3\theta=\frac{4J_3}{r^3}=31.03^\circ \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{Bmatrix}=\frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}}\begin{Bmatrix}\cos\theta\\ \cos(\theta-\frac{2}{3}\pi)\\ \cos(\theta+\frac{2}{3}\pi)\end{Bmatrix}+\frac{I_1}{3}=5.288\begin{Bmatrix}\cos(31.03^0)\\ \cos(31.03^0-120^0)\\ \cos(31.03^0+120^0)\end{Bmatrix}-8=\begin{Bmatrix}-3.466\\ -7.905\\ -12.630\end{Bmatrix}$$

求非线性指标

$$\frac{f_t}{f_c}=0.1 \qquad a=1.2856\quad b=1.4268\quad c=10.2251\quad d=3.2128$$

$$1.2856\frac{J_{2f}}{f_c^2}+(1.4268+10.2251\cos\theta)\frac{\sqrt{J_{2f}}}{f_c}+3.2128\frac{I_1}{f_c}-1=0$$

$$0.003214J_{2f}+0.5094\sqrt{J_{2f}}-4.8554=0$$

$$\sqrt{J_{2f}}=9.018$$

$$\beta=\frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{J_{2f}}}=\frac{5.292}{9.018}=0.587$$

得到E_s和ν_s

$$\sigma=f_c\left[2\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2\right]$$

$$\beta=\frac{\sigma}{f_c}，\ E_s=\frac{\sigma}{\varepsilon}，\ E_0=2(\frac{f_c}{\varepsilon_0})$$

$$E_s=\frac{E_0}{2}(1+\sqrt{1-\beta})=\frac{30}{2}(1+\sqrt{1-0.587})=24.64GPa$$

$$\beta<0.8 \qquad \nu_s=\nu_0=0.18$$

增量模型

- 增量形式的切线模量 $E_t = \dfrac{d\sigma}{d\varepsilon}$

Saenz's Model

$$\sigma = \frac{E_0 \varepsilon}{1 + \left(\frac{E_0}{E_c} - 2\right)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2}$$

$$E_t = \frac{E_0\left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{E_0}{E_s} - 2\right)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2\right]^2}$$

Darwin模型

- 假设在双向应力下等效应力应变关系仍服从Saenz公式

$$\sigma = \frac{E_0 \varepsilon_{iu}}{1 + \left(\frac{E_0}{E_c} - 2\right)\left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}}\right) + \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}}\right)^2}$$

- 峰值应力和峰值应变的计算

$\alpha = \sigma_1 / \sigma_2 \qquad \sigma_{2c} = \dfrac{1 + 3.65\alpha}{(1+\alpha)^2} f_c \qquad \sigma_{1c} = \alpha \sigma_{2c}$

if $|\sigma_{ic}| \geq f_c \qquad \varepsilon_{ic} = \varepsilon_p \left[\dfrac{3\sigma_{ic}}{f_c} - 2\right]$

if $|\sigma_{ic}| < f_c \qquad \varepsilon_{ic} = \varepsilon_p \left[-1.6\left(\dfrac{\sigma_{ic}}{f_c}\right)^3 + 2.25\left(\dfrac{\sigma_{ic}}{f_c}\right)^2 + 0.35\left(\dfrac{\sigma_{ic}}{f_c}\right)\right]$

本构矩阵

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1 E_2} & 0 \\ \nu\sqrt{E_1 E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(E_1 + E_2 - 2\nu E_1 E_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

Biaxial compression $\nu = 0.2$

Others $\nu = 0.2 + 0.6\left(\dfrac{\sigma_2}{f_c}\right)^4 + 0.4\left(\dfrac{\sigma_1}{f_c}\right)^4$

Bathe 模型(ADINA源程序)

- 弹性本构矩阵
  - 受拉未开裂，受压但压应力很小，卸载

$$D_e = \frac{E_0}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & 0.5(1-2\nu) & 0 & 0 \\ & & & & 0.5(1-2\nu) & 0 \\ & & & & & 0.5(1-2\nu) \end{bmatrix}$$

一维应力应变关系

$$\sigma = \frac{E_0 \varepsilon}{1 + (R + \frac{E_0}{E_c} - 2)\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - (2R-1)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^2 + R\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^3}$$

$$R = \frac{E_0(\frac{\sigma_0}{\sigma_u} - 1)}{E_c(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_c} - 1)^2} - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_u}$$

$$E_t = \frac{1 + (2R-1)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^2 - 2R\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^3}{\left[1 + (R + \frac{E_0}{E_c} - 2)\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - (2R-1)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^2 + R\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^3\right]^2}$$

受压应力水平较低时

$$D = \frac{E_t}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & 0.5(1-2\nu) & 0 & 0 \\ & & & & 0.5(1-2\nu) & 0 \\ & & & & & 0.5(1-2\nu) \end{bmatrix}$$

$$E_t = \frac{|\sigma_1| E_{t1} + |\sigma_2| E_{t2} + |\sigma_3| E_{t3}}{|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|}$$

$\gamma = \sigma_{3f} / \sigma_c \geq 1$，$\sigma_u' = \gamma \sigma_u$，$\varepsilon_0' = \gamma\beta\varepsilon_0$，$\varepsilon_u' = \gamma\beta\varepsilon_u$

受压应力水平较高时

$$D = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} (1-\nu)E_1 & \nu E_{12} & \nu E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu)E_2 & \nu E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu)E_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0.5(1-2\nu)E_{12} & 0 & 0 \\ & & & & 0.5(1-2\nu)E_{13} & 0 \\ & & & & & 0.5(1-2\nu)E_{23} \end{bmatrix}$$

$$E_{ij} = \frac{|\sigma_{ii}| E_i + |\sigma_{jj}| E_j}{|\sigma_{ii}| + |\sigma_{jj}|}$$

多轴压缩时的破坏面

已知某时刻主应力状态后，假设${}^t\sigma_{p1}$和${}^t\sigma_{p2}$保持不变，

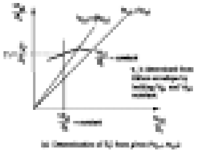
在破坏包络面上找到相应的交点，并设该点主压应力为 $\tilde{\sigma}_c'$

令$\gamma_1 = \tilde{\sigma}_c' / \tilde{\sigma}_c$**。则**

$\tilde{\sigma}_u' = \gamma_1 / \tilde{\sigma}_u$；

$\tilde{e}_c' = (C_1\gamma_1^2 + C_2\gamma_1)\tilde{e}_c$；

$\bar{e}_u' = (C_1\gamma_1^2 + C_2\gamma_1)\tilde{e}_u$



等效单轴应力应变关系

$\tilde{\sigma}_u' = \gamma_1 / \tilde{\sigma}_u$；

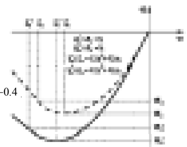
$\tilde{e}_c' = (C_1\gamma_1^2 + C_2\gamma_1)\tilde{e}_c$；

$\bar{e}_u' = (C_1\gamma_1^2 + C_2\gamma_1)\tilde{e}_u$

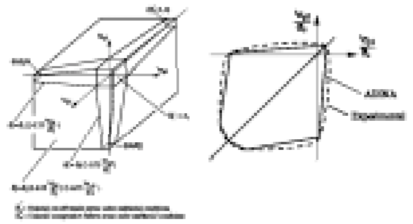
其中C_1和C_2是输入参数。通常$C_1 = 1.4$，$C_2 = -0.4$

用$\tilde{\sigma}_c'$，$\tilde{\sigma}_u'$，$\tilde{e}_c'$和$\tilde{e}_u'$代替没有撇号的参数，

就确定多轴状态下的等效单轴应力应变关系。



开裂包络面



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

开裂混凝土矩阵

$$D=\begin{bmatrix} E_0\eta_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} E_2 & \nu E_{23} \\ & E_3 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{E_0\eta_s}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{E_0\eta_s}{2(1+\nu)} & \\ & & & & & \frac{E_{23}}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

加卸载指标

$$f=S_{ij}+3\alpha\sigma_m$$

$$S_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma_m\delta_{ij}$$

if $f\ge f_{\max}$ loading

if $f<f_{\max}$ unloading

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

泊松比变化

$\nu=\nu_0$

OR

$$\nu=\nu_0[1.0+1.3763\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}-5.3600\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2+8.586\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^3]$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

分析步骤

- 给定材料参数和破坏准则
- 选定计算参数
- 给定应力值
- 计算主应力
- 判断应力水平，得到当前应力水平下的材料参数
- 判断材料受力状态，判断加卸载
- 得到本构矩阵和应力增量
- 迭代求解

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

作业

- 文献阅读：
  - 查阅一下近5年来混凝土断裂分析方面的文献，写一个读书报告

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

期末大作业

- 程序作业：
  - 用有限元程序（不限），算一下RC悬臂柱
  - 尺寸：4000 × 500 × 300mm
  - 对称配筋，配筋率2%
  - 顶部受到3MPa的压力
  - 基本要求：比较受剪配筋率，剪力传递系数，单元尺寸的影响
  - 提高要求：画出柱子的轴力弯矩关系曲线或曲面

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

选做大作业（可代替期末考试）

- 根据本人兴趣或研究课题，编制混凝土计算程序
- 可以是实体单元计算程序或一维单元计算程序
- 可以全部自己写，也可以嵌入通用有限元程序

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

实体单元

- 要求：
  - 混凝土二维或三维本构程序
  - 给出单压、单拉、双压应力应变曲线
  - 至少一个构件的非线性分析

一维单元（梁单元或墙单元）

- 要求：
  - 平面或空间非线性梁单元、墙单元或纤维模型
  - 给出单元在反复荷载下的反应
  - 模拟一个简单结构的静力推覆分析或非线性地震反应