混凝土弹塑性本构关系

江见鲸 陆新征
清华大学土木工程系

2005

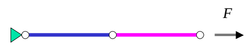
非线性结构求解步骤

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_1+k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\delta_i \Rightarrow \varepsilon_i$

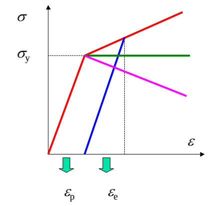
$\varepsilon_i \Rightarrow \sigma_i$

$\sigma_i \Rightarrow F_i$

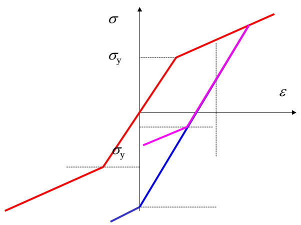


材料的一维弹塑性行为

- 加载->卸载
  - 屈服应力
  - 弹性应变
  - 塑性应变
  - 硬化

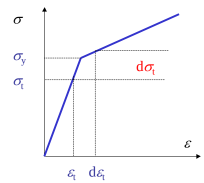


一维等强硬化和随动硬化



一维弹塑性程序迭代步骤

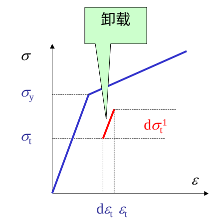
- 已知骨架线函数σ=f(ε)
- 输入σ_t, ε_t, dε_t, σ_y
- 计算dσ_t



1 计算试算应力

- $d\sigma_t^1 = E_0 d\varepsilon_t$
- 如果σ_t+dσ_t^1< σ_y
  - 则处于卸载

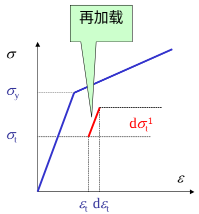
  或者再加载状态
- dσ_t=dσ_t^1



1 计算试算应力

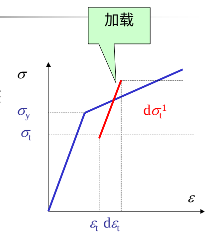
- $d\sigma_t^1 = E_0 d\varepsilon_t$
- 如果σ_t+dσ_t^1< σ_y
  - 则处于卸载

  或者再加载状态
- dσ_t=dσ_t^1



2 加载计算

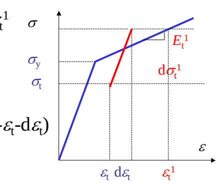
- $d\sigma_t^1 = E_0 d\varepsilon_t$
- 如果σ_t+dσ_t^1> σ_y
  - 则处于加载状态
- 需要迭代求解



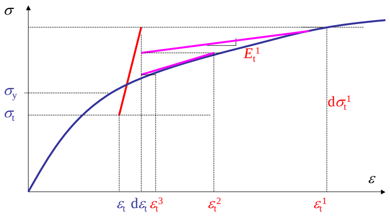
2.1 双线性硬化

- 由骨架线函数
- 得到对应σ_t+dσ_t^1
  - ε_t^1
  - E_t^1
- 则

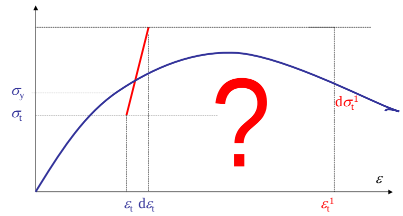
dσ_t= dσ_t^1- E_t^1(ε_t^1-ε_t-dε_t)



2.2 曲线硬化



问题？对于软化材料？



弹塑性本构关系

- 形变理论
  - 弹塑性小变形理论
  - 适用于比例加载
  - 计算简单
- 增量理论
  - 塑性条件下应力和应变间的增量关系
  - 需要按加载过程积分
  - 适用于计算机分析

增量理论的三个基本假定

- 屈服准则
  - 应力满足什么条件时进入屈服状态
- 流动法则
  - 材料屈服后塑性变形增量的方向
- 硬化法则
  - 到达屈服面后，屈服极限的后续变化

屈服面

$$F(\sigma_{ij})=0$$

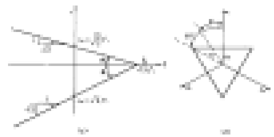
- 材料达到屈服状态，出现塑性变形
- 材料屈服后屈服极限随塑性应变增大而增大，称为硬化
- 随塑性应变增大而减小称为软化
- 屈服极限保持不变，理想弹塑性

常用屈服面

- 最大拉应力

$$\sigma_1 = f_t$$

$$f(I_1,J_2,\theta)=2\sqrt{3J_2}\cos\theta+I_1-3f_t=0$$



常用屈服面

- Tresca

$$\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)=K$$

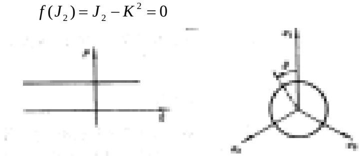
$$f(J_2,\theta)=\sqrt{J_2}\sin(\theta+\pi/3)-K=0$$

$$f(\rho,\theta)=\rho\sin(\theta+\pi/3)-\sqrt{2}K=0$$

常用屈服面

- Von Mises

$$f(J_2)=J_2-K^2=0$$



常用屈服面

- 莫尔一库仑

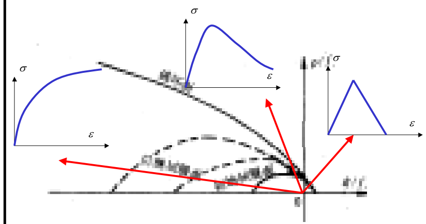
$$f(I_1,J_2,\theta)=\frac{1}{3}I_1\sin\varphi+\sqrt{J_2}\sin(\theta+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}}\cos(\theta+\frac{\pi}{3})\sin\varphi-c\cos\varphi=0$$

常用屈服面

- Drucker-Prager

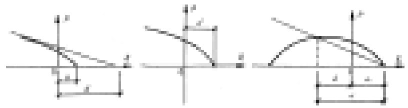
$$f(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0$$

混凝土的屈服面和破坏面



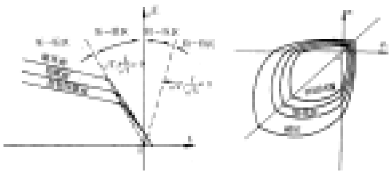
通用屈服准则

- Zienkiewicz-Pande屈服条件
  - 修正莫尔库仑准则
  - 子午面有多种选取形式



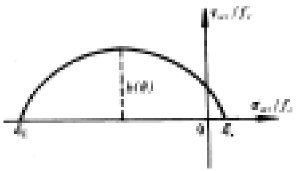
WF Chen屈服准则

- 屈服面分区为
  - 压－压区，压－拉区，拉－压区，拉－拉区



Nilson屈服条件

- 用椭球面来表示

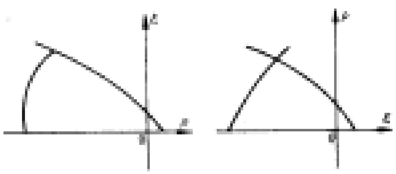


于丙子屈服条件

$$F(I_1, \sqrt{J_2}) = \sqrt{J_2} - k\left(1 - \frac{I_1}{P_0}\right)^{\alpha} - \left(1 - \frac{I_1}{P_1}\right)^{\beta} = 0$$

- 可以表达多种屈服曲形式
- 便于编写计算程序

帽盖模型和双屈服面准则



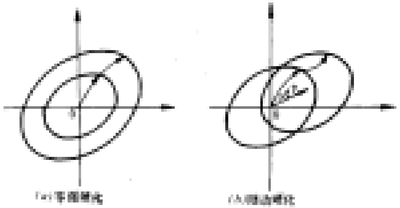
(a)帽盖模型　(b)双屈服面

帽盖模型例子

强化条件和加卸载准则

- 强化条件与后继屈服面
  - 荷载进入塑性后卸载再加载，再次进入塑性状态的点称为强化点
  - 进入塑性，屈服面发生变化，称为后继屈服面。不但与应力，而且与塑性变形和加载历史有关。

屈服面与后继屈服面



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

加卸载准则

- 理想弹塑性

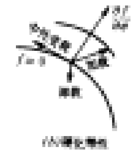
$F(\sigma_{ij})<0$ 弹性状态

$$F(\sigma_{ij})=0\begin{cases} dF=\dfrac{\partial F}{\partial \sigma}d\sigma=0 & \text{加载} \\ dF=\dfrac{\partial F}{\partial \sigma}d\sigma<0 & \text{卸载} \end{cases}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

强化材料

$$F(\sigma_{ij})=0\begin{cases} dF=\dfrac{\partial F}{\partial \sigma}d\sigma>0 & \text{加载} \\ dF=\dfrac{\partial F}{\partial \sigma}d\sigma=0 & \text{中性变载} \\ dF=\dfrac{\partial F}{\partial \sigma}d\sigma<0 & \text{卸载} \end{cases}$$



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

软化材料

- 应变空间

$$\varphi(\varepsilon_{ij},H)=0\begin{cases} d\varphi=\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}d\varepsilon>0 & \text{加载} \\ d\varphi=\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}d\varepsilon=0 & \text{中性变载} \\ d\varphi=\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}d\varepsilon<0 & \text{卸载} \end{cases}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

强化模型

- 等向强化 $F(\sigma_{ij},K)=F[\sigma_{ij}-K(\varepsilon_{ij}^p)]=0$
  - 作功强化 $K=H(\int dw^p)=H(\int \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p)$
  - 应变强化 $K=H(\int dw^p)=H(\int \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p})$
- 随动强化 $F(\sigma_{ij},H)=F(\sigma_{ij}-\alpha_{ij})=0$
  - 移动张量 $\alpha_{ij}=C\varepsilon_{ij}^p$
- 混合强化 $F(\sigma_{ij},H)=F(\sigma_{ij}-\alpha_{ij})-K=0$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

流动法则

- 塑性位势 $g(\sigma_{ij},H)=0$
- 塑性应变增量与塑性位势面正交 $g(\sigma_{ij},H)=0$

$$d\varepsilon_{ij}^p=d\lambda\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$d\varepsilon_{ij}^p=d\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}}+d\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$d\varepsilon_{ij}^p=d\lambda\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}=d\lambda\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

弹塑性矩阵的一般表达形式

$$d\sigma=D_e(d\varepsilon-d\varepsilon^p) \qquad d\varepsilon^p=d\lambda\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right]$$

$$dF=\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right]^T d\sigma+\left[\frac{\partial F}{\partial K}\right]^T dK=0$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right]^T D_e(d\varepsilon-d\varepsilon^p)+\left[\frac{\partial F}{\partial K}\right]^T dK=0$$

令 $A=-\dfrac{1}{d\lambda}\left[\dfrac{\partial F}{\partial K}\right]^T dK$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

弹塑性矩阵的一般表达形式

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right]^T D_e(d\varepsilon-d\lambda\frac{\partial F}{\partial \sigma})-d\lambda A=0$$

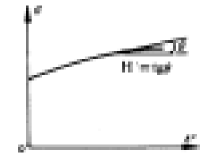
$$d\lambda=\frac{\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right]^T D_e d\varepsilon}{A+\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right]^T D_e\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right]}$$

$$d\sigma=\boxed{\left[D_e-\frac{D_e\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right]\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right]^T D_e}{A+\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right]^T D_e\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right]}\right]}d\varepsilon$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

硬化模量A

对于作功硬化，$A=H'$



弹塑性通用矩阵的编制

$$F(I_1,\sqrt{J_2},J_3,K)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma}=\frac{\partial F}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \sigma}+\frac{\partial F}{\partial \sigma_e}\frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma}+\frac{\partial F}{\partial J_3}\frac{\partial J_3}{\partial \sigma}=C_1\frac{\partial I_1}{\partial \sigma}+C_2\frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma}+C_3\frac{\partial J_3}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad \frac{\partial J_2}{\partial \sigma}=\frac{1}{2\sqrt{J_2}}\begin{bmatrix}S_x\\S_y\\S_z\\2\tau_{xy}\\2\tau_{yz}\\2\tau_{zx}\end{bmatrix}\qquad \frac{\partial J_3}{\partial \sigma}=\begin{bmatrix}S_yS_z-\tau_{yz}^2+\frac{J_3}{3}\\S_zS_x-\tau_{zx}^2+\frac{J_3}{3}\\S_xS_y-\tau_{xy}^2+\frac{J_3}{3}\\2(\tau_{yz}\tau_{zx}-S_z\tau_{xy})\\2(\tau_{xy}\tau_{zx}-S_x\tau_{yz})\\2(\tau_{xy}\tau_{yz}-S_y\tau_{zx})\end{bmatrix}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

Tresca条件

$$F(\sqrt{J_2},\theta)=2\sqrt{J_2}\sin(\theta+60^0)-\sigma_y=0$$

$$C_1=0$$

$$C_2=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta+\cos3\theta(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)$$

$$C_3=\sqrt{3}(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)/2J_2\sin3\theta$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

Von Mises条件

$$F(\sqrt{J_2})=\sqrt{3J_2}-\sigma_y=0$$

$$C_1=0$$

$$C_2=\sqrt{3}$$

$$C_3=0$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

Mohr-Coulomb条件

$$F(I_1,\sqrt{J_2},\theta)=\frac{\sin\phi}{3}I_1+J_2\sin(\theta+60^0)+\frac{J_2\sin\phi}{\sqrt{3}}\cos(\theta+60^0)-\cos\phi=0$$

$$C_1=\frac{\sin\phi}{3}$$

$$C_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(3+\sin\phi)(\cos\theta-\sin\theta c\tan3\theta)\right]+\sqrt{3}\left[(1-\sin\phi)(\sin\theta+\cos\theta c\tan3\theta)\right]$$

$$C_3=\frac{1}{4J_2\sin3\theta}\left[(3+\sin\phi)\sin\theta-\sqrt{3}(1-\sin\phi)\cos\theta\right]$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

Drucker-Prager条件

$$F(I_1,\sqrt{J_2})=\alpha I_1+\sqrt{J_2}-k'=0$$

$$C_1=\alpha$$

$$C_2=1$$

$$C_3=0$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

WF Chen条件

If $I_1\le0$，$\sqrt{J_2}+\frac{I_1}{\sqrt{3}}\le0$

$$F(I_1,\sqrt{J_2})=\frac{A_u}{3}I_1+J_2-\tau_u^2=0$$

$$C_1=\frac{A_u}{3}$$

$$C_2=2\sqrt{J_2}$$

$$C_3=0$$

If $I_1>0$，$\sqrt{J_2}+\frac{I_1}{\sqrt{3}}>0$

$$F(I_1,\sqrt{J_2})=\frac{A_u}{3}I_1-\frac{I_1^2}{6}+J_2-\tau_u^2=0$$

$$C_1=\frac{A_u}{3}(1-I_1)$$

$$C_2=2\sqrt{J_2}$$

$$C_3=0$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

塑性积分计算步骤

- 显式方法
  - 逐步积分，不迭代收敛
- 隐式方法
  - 迭代直至收敛

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

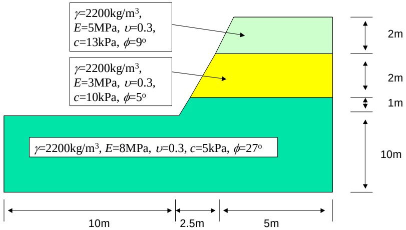
显式积分方法

- 计算步骤
  - 上一步单元已经屈服，加载后仍未屈服，使用弹性本构矩阵D_e
  - 上一步单元已经屈服，加载后仍然屈服，使用弹塑性本构矩阵D_{ep}
  - 上一步单元处于弹性，加载后单元屈服，处于过渡状态，使用加权组合方法$D=mD_e+(1-m)D_{ep}$

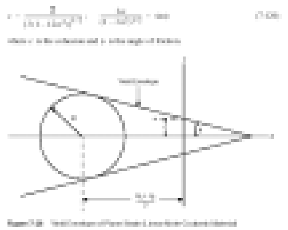
$$m=\frac{\varepsilon_s-\bar{\varepsilon}_{k-1}}{\bar{\varepsilon}_k-\bar{\varepsilon}_{k-1}}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

教学算例



Linear Mohr-Coulomb



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

Material Parameters

Soil	1	2	3
ϕ	9	5	27
$\sin\phi$	0.156	0.087	0.454
α	0.052	0.029	0.146
c	13	10	5
σ	22.15	17.23	7.47

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

作业：1

- 已知一点应力为：(-20,-20,5,6,10,8)，
- 问：当应力增量分别为
  - (-10,-10,-20,0,0,0)
  - (0,10,0,0,0,0)
- 时，问对于Von Mises屈服准则，是加载还是卸载？

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

上机作业：2

要求：绘出边坡的变形曲线