

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

钢筋混凝土有限元模型

江见鲸 陆新征
清华大学土木工程系

2005

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

钢筋与混凝土的组合

- 钢筋混凝土有限元分析的复杂性:
 - 材性本身的复杂性
 - 材料组合的复杂性
- 常用的钢筋混凝土有限元组合方式:
 - 分离式模型
 - 组合式模型
 - 整体式模型

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

分离式模型

- 将钢筋与混凝土分别作为不同单元来处理
- 一般将混凝土简化为实体单元，钢筋简化为梁单元或桁架单元
- 钢筋与混凝土之间的滑移可以通过在钢筋与混凝土之间添加相应的界面单元加以模拟

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

分离式模型

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

常用的混凝土单元

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

平面三角形单元

- 取单元内部的位移场为

$$u = a_1 + a_2x + a_3y$$

$$v = b_1 + b_2x + b_3y$$

$$u_i = a_1 + a_2x_i + a_3y_i$$

$$u_j = a_1 + a_2x_j + a_3y_j$$

$$u_m = a_1 + a_2x_m + a_3y_m$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

求解方程

$$a_1 = (a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m) / 2\Delta$$

$$a_2 = (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) / 2\Delta$$

$$a_3 = (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) / 2\Delta$$

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j$$

$$b_i = y_j - y_m$$

$$c_i = -x_j + x_m$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

形函数

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m$$

$$v = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

应变场

$$[\epsilon] = [\delta] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

$$[\epsilon] = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$[\epsilon] = [B] \delta$$

B 几何矩阵

$$= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

单元刚度矩阵

$$[D] = \frac{E}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[K] = [B]^T [D] [B] \Delta$$

参考网页上的教学程序planarFEM.pdf

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

三角形单元程序

- PlanarFEM

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

等参单元

- 整体坐标系
- 局部坐标系

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

母单元插值函数

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

单元内应变场

$$[e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

雅可比矩阵

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & (1-\xi) & (1+\xi) & -(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

高斯积分

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \nu d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n w_i ([B]^T [D] [B]) \nu_i$$

n	高斯点	权因子
1	0.0	2.0
2	$\pm \sqrt{1/3}$	1.0
3	± 0.7745967	0.555556
	0.0	0.888889

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

其他常用单元

- 平面8节点等参元
- 空间8节点等参元

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

参阅教学网页上相关程序

- planarFEM.pdf
- 3D_Solid_src.pdf
- source_planeferm.zip

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

钢筋单元

- 常用单元
- 桁架单元
- 梁单元
- 二维或三维

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

钢筋与混凝土的界面单元形式

- 弹簧单元
 - Spring, link
- 滑移单元
 - Goodman

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

弹簧单元

$$[\Delta u] = \begin{bmatrix} \Delta u' \\ \Delta v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

四边形滑移单元

- 最早由Goodman提出作为岩石力学中的节理单元
- 单元宽度为零，不影响网格划分
- 与混凝土单元位移插值函数一样

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

形函数的推导

$$[\Delta u] = \begin{bmatrix} \Delta u' \\ \Delta v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ v_1 - v_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta u' = a_1 + a_2 x' \quad \Delta v' = a_3 + a_4 x'$$

$$u_1' - u_2' = a_1 - \frac{a_2 l}{2} \quad v_1' - v_2' = a_3 - \frac{a_4 l}{2}$$

$$u_1'' - u_2'' = a_1 - \frac{a_2 l}{2} \quad v_1'' - v_2'' = a_3 - \frac{a_4 l}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}[(u_1' - u_2') + (u_1'' - u_2'')] \quad a_2 = \frac{1}{l}[(u_1' - u_2') - (u_1'' - u_2'')]$$

$$a_3 = \frac{1}{2}[(v_1' - v_2') + (v_1'' - v_2'')] \quad a_4 = \frac{1}{l}[(v_1' - v_2') - (v_1'' - v_2'')]$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

形函数矩阵

$$[\Delta u] = \begin{bmatrix} \Delta u' \\ \Delta v' \end{bmatrix} = [N][\delta] =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\frac{x'}{l}) & 0 & -\frac{1}{2}(\frac{x'}{l}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{x'}{l}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{x'}{l}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\frac{x'}{l}) & 0 & -\frac{1}{2}(\frac{x'}{l}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{x'}{l}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{x'}{l}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ v_1' \\ u_2' \\ v_2' \\ u_1'' \\ v_1'' \\ u_2'' \\ v_2'' \end{bmatrix}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

局部坐标系下的刚度矩阵

$$[k'] = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2k_x' & & & & & & & & & & \\ 0 & 2k_y' & & & & & & & & & \\ k_x' & 0 & 2k_x' & & & & & & & & \text{sym} \\ 0 & k_y' & 0 & 2k_y' & & & & & & & \\ -k_x' & 0 & -2k_x' & 0 & 2k_x' & & & & & & \\ 0 & -k_y' & 0 & -2k_y' & 0 & 2k_y' & & & & & \\ -2k_x' & 0 & k_x' & 0 & k_x' & 0 & 2k_x' & & & & \\ 0 & -2k_y' & 0 & -k_y' & 0 & k_y' & 0 & 2k_y' & & & \end{bmatrix}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

坐标转换矩阵与整体刚度矩阵

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & & & & & & & & & \\ -\sin\theta & \cos\theta & & & & & & & & & \\ & & \cos\theta & \sin\theta & & & & & & & \\ & & -\sin\theta & \cos\theta & & & & & & & \\ & & & & \cos\theta & \sin\theta & & & & & \\ & & & & -\sin\theta & \cos\theta & & & & & \\ & & & & & & \cos\theta & \sin\theta & & & \\ & & & & & & -\sin\theta & \cos\theta & & & \end{bmatrix}$$

$$[K] = [T]^T [k'] [T]$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

钢筋与混凝土的粘结滑移本构

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

局部粘结滑移关系

- Nilson

$$\tau(\text{kgf/cm}^2) = 100 \times 10^2 S(\text{cm}) - 58.5 \times 10^6 S^2 + 8.53 \times 10^9 S^3$$

- Houde & Mirza

$$\tau(\text{kgf/cm}^2) = (54 \times 10^2 S(\text{cm}) - 25.7 \times 10^6 S^2 + 5.98 \times 10^9 S^3 - 0.558 \times 10^{12} S^4) \sqrt{\frac{f_c'}{415}}$$

- 滕智明

$$\tau(\text{MPa}) = (61.55(\text{mm}) - 693S^2 + 3.14 \times 10^3 S^3 - 0.478 \times 10^4 S^4) f_{cs} \sqrt{c} d F(x)$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

反复荷载下的粘结滑移关系

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

滕智明模型

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

评述

- 分离式钢筋-混凝土组合模型是目前最常用,也是最直接的实现方法
- 便于考虑钢筋与混凝土之间的粘结滑移
- 便于考虑非常不规则的配筋
- 前处理略为复杂
- 有应力集中问题存在

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

组合式模型

- 分层组合模型 (多用于杆件系统)
- 基于平截面假定

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

带钢筋的四边形单元

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

单根钢筋的刚度矩阵

$$[K] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$[F] = [X_s \ Y_s \ X_c \ Y_c]^T$$

$$[U] = [u_s \ v_s \ u_c \ v_c]^T$$

$$[F] = [K][U]$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

几何变形相似

$$\frac{U_s}{b_s} = \frac{U_c}{l_2}$$

$$U_s = \frac{U_c b_s}{l_2}$$

$$V_s = \frac{V_c b_s}{l_2}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

钢筋附加刚度矩阵

$$[\bar{K}] = [k_s \ v_s \ u_s \ v_c]^T = \begin{bmatrix} \frac{a_s}{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_s}{l_1} & 0 \\ 0 & \frac{a_s}{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_s}{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_s}{l_2} & 0 & \frac{b_s}{l_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b_s}{l_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_s}{l_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_s}{l_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = [K][U]$$

$$[K_{eq}] = [K] + [K_s] = [K_c] + [R]^T [K] [R]$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

带钢筋膜的8节点6面体单元

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

应变坐标转换

$$[e'] = \begin{bmatrix} \epsilon_x' \\ \epsilon_y' \\ \gamma_{xy}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v'}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u'}{\partial \eta} + \frac{\partial v'}{\partial \xi} \end{bmatrix} = [L][e]$$

$$[L] = \begin{bmatrix} l_1^i & m_1^i & n_1^i & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_1^j & m_1^j & n_1^j & l_1 m_2 & m_1 n_2 & n_1 l_2 \\ 2l_1^k & 2m_1^k & 2n_1^k & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \end{bmatrix}$$

$$l_1 = \frac{1}{a} \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad m_1 = \frac{1}{a} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad n_1 = \frac{1}{a} \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad a_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}$$

$$l_2 = \frac{1}{a} \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad m_2 = \frac{1}{a} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad n_2 = \frac{1}{a} \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad a_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

钢筋薄膜面积

$$dA = |d\xi \times d\eta| = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} d\xi d\eta$$

$$M_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$M_2 = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

$$M_3 = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi}$$

$$dV = dA t$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

钢筋平面内应力应变关系

$$\{\sigma'\} = [D_s][e']$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ \tau_{xy}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x' \\ \epsilon_y' \\ \gamma_{xy}' \end{Bmatrix}$$

- 如单根钢筋直径为 A_s ，间距为 a_s ， E_c 是混凝土模量，则等效厚度为

$$t = \frac{A_s E_s - E_c}{a_s E_s}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

钢筋混凝土单元矩阵

$$[K] = [K_c] + [K_s] = [K_c] + \iint [B]^T [L]^T [D_s] [L] [B] dA$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

评述

- 组合式单元的精度在分离式和整体式模型之间，并可大大降低结构中单元总数
- 有时可以减少前处理难度（比分离式模型）
- 对于非规则单元，实现有一定难度
- 在MARC, ABAQUS等有限元程序中都集成有组合式钢筋单元

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

补充:

- 可考虑滑移的组合式单元
- Journal of Materials in Civil Engineering ASCE, 15(4), 2003

FIG4. Construction of the 12-noded DRC element

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

整体式模型

- 将整个钢筋弥散与混凝土中

$$[D] = [D_c] + [D_s]$$

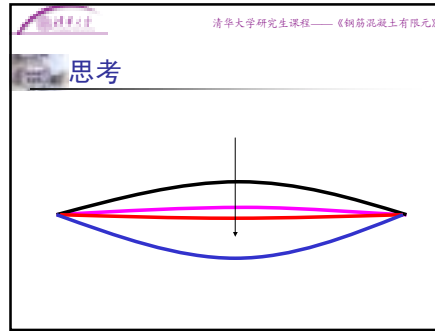
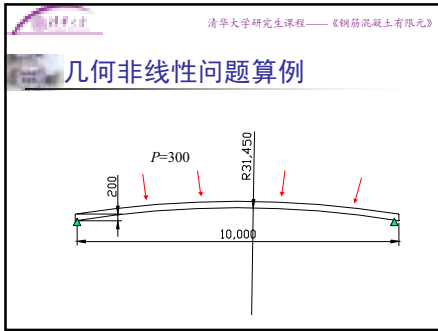
$$[K] = \int [B]^T [D] B dv$$

$$[D_s] = E_s \begin{bmatrix} \rho_s & & & & & \\ & \rho_s & & & & \\ & & \rho_s & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

评述

- 建模最简单（相当于将钢筋均匀布置在整个混凝土单元中）
- 精度较差
- ANSYS中集成该钢筋模型



- 清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》
- ### 弧长法参数
- Initial fraction 0.001
 - Maximal fraction 0.5
 - Maximal # increments 500
 - Desire # recycles/inc 3
 - Max arc length ratio 1
 - Min arc length ratio 0.0001

