混凝土的开裂有限元分析

江见鲸 陆新征
清华大学土木工程系

2005

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

混凝土的开裂与裂缝处理

- 混凝土的一个重要特点是它在较低的应力水平下就会开裂，且很多混凝土结构都是带裂缝工作的
- 开裂后的混凝土其力学行为与未开裂混凝土有很大不同，能否正确模拟开裂后的混凝土是混凝土有限元分析中的关键问题
- 混凝土中大量的裂缝是对基于连续体力学的有限元方法的一个重要挑战

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

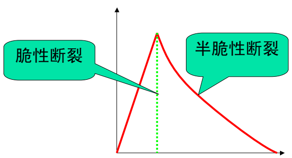
举例

- 受弯破坏
  - 裂缝使得混凝土的抗弯刚度损失超过1/3
- 受剪受扭破坏
  - 斜裂缝是构件破坏的重要原因
  - 裂面抗剪贡献占整个构件承载力的30%以上
- 局部承压破坏、受拉破坏都和裂缝行为关系密切

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

脆性材料与半脆性材料

- 脆性材料 (brittle)
- 半脆性材料 (Quasi-brittle)



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

混凝土开裂分析方法

- 经典断裂力学方法
  - 优点：理论严格
  - 缺点：比较适用于金属和均匀材料，不能分析大量裂缝
- 半经验半理论方法
  - 优点：简单实用，部分模型可以分析大量裂缝
  - 缺点：经验成分多，参数理论依据不足

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

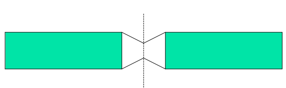
区分

- 经典断裂力学方法
  - 引入断裂韧度、断裂能等概念，用以此判断破坏
  - $K<K_c$ 或 $G<G_c$ 或 $J<J_c$
- 半经验半理论方法
  - 采用传统的强度分析理论，但是部分考虑混凝土的断裂力学指标（断裂能）
  - $\sigma<\sigma_{cr}$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

断裂力学的起因

- 传统工程设计中所谓的“容许应力设计准则”，其实是“平均应力”设计准则
- 平均应力很多时候无法保证安全

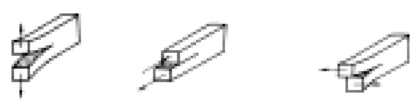


$\sigma = F/A$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

断裂力学的基本理论

- 基本开裂形式
  - 张开型(I)
  - 滑开型(II)
  - 撕开型(III)
- 复合裂缝



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

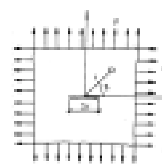
裂纹尖端应力场

- 弹性理论得到的裂纹尖端应力

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)$$



r->0，应力->无穷

应力强度因子

- 裂纹尖端的应力趋向于无穷大
- 应力强度理论已经不再适合
- 引入断裂强度因子等概念来描述裂纹尖端附近的应力场

应力强度因子计算

- 无限大平板

$$K_I = \lim_{r\to 0}[\sqrt{2\pi r}(\sigma_y)_{\theta=0}] = \sigma\sqrt{\pi a}$$

$$K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}$$

$$K_{III} = \tau_l\sqrt{\pi a}$$

- 其他情况：解析解、数值解

裂缝发展判据

- 材料的断裂韧度 K
- 当应力强度因子大于材料的断裂韧度时，裂缝将扩展
- 用途
  - 已知裂缝尺寸，判断裂缝是否会扩展
  - 材料和应力，判断最大允许裂缝尺寸
  - 已知应力状态和裂缝尺寸，选择材料

能量判据

- 裂缝扩展单位长度时所需要的能量 G
- 弹性情况下，能量判据可以与应力强度因子判据互换

$$G_I = \begin{cases} \dfrac{K_I^2}{E} \\ \dfrac{(1-\nu^2)K_I^2}{E} \end{cases} \qquad G_{II} = \begin{cases} \dfrac{K_{II}^2}{E} \\ \dfrac{(1-\nu^2)K_{II}^2}{E} \end{cases} \qquad G_{III} = \frac{(1+\nu)K_{III}^2}{E}$$

裂纹的扩展方向

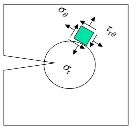
- 最大周向应力理论
- 能量释放率理论
- 应变能密度理论

最大周向应力理论

$$\sigma_r = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}}\left[K_I(3-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2} + K_{II}(3\cos\theta - 1)\sin\frac{\theta}{2}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}[K_I(1+\cos\theta) - 3K_{II}\sin\theta]$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}[K_I\sin\theta + K_{II}(3\cos\theta - 1)]$$



- 求 θ 使得 $(\sigma_\theta)_{max}$

计算方法

$$\left(\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}\right)_{r=r_0} = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2\sigma_\theta}{\partial\theta^2}\right)_{r=r_0} < 0$$

$$\begin{cases} \theta_0 = \begin{cases} \arctan\dfrac{-3K_I \pm \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{8K_{II}} & (K_{II} \neq 0) \\ 0 & (K_{II} = 0) \end{cases} \\ K_I\cos\dfrac{\theta_0}{2}(3\cos\theta_0 - 1) - K_{II}\sin\dfrac{\theta_0}{2}(9\cos\theta_0 + 5) > 0 \end{cases}$$

裂缝扩展判断标准

$$K_\theta = \frac{1}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}[K_I(1+\cos\theta_0) - 3K_{II}\sin\theta_0]$$

$$K_\theta > K_{IC}$$

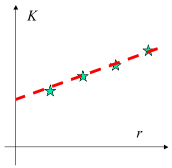
应力强度因子计算方法

- 弹性力学方法
- 手册法
- 有限元法

有限元法求K_I, K_{II}

$$u=\frac{1}{4G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[K_I f_1(\theta)+K_{II}g_1(\theta)\right]$$

$$v=\frac{1}{4G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[K_I f_2(\theta)+K_{II}g_2(\theta)\right]$$



非线性断裂力学

- 材料不再是理想弹性，而是弹塑性材料
- 不再有应力趋于无穷大的情况
- 仍然是目前研究的热点问题

小范围屈服

- Von Mises 屈服条件

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=2\sigma_s$$

$$\sigma_x=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2})$$

$$\sigma_y=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2})$$

$$\tau_{xy}=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2})$$

弹性应力场下的塑性区界限

- 平面应力

$$r=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_s}\right)^2\left[\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1+3\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

- 平面应变

$$r=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_s}\right)^2\cos^2\frac{\theta}{2}\left[(1-2\nu)^2+3\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

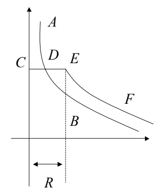
塑性应力场下的塑性区

- ADB和CDEF下面积相等

$$R\sigma_s=\int_0^{r_0}\sigma_y dr=\int_0^{r_0}\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}dr=K_I\sqrt{\frac{2r_0}{\pi}}$$

$$R=2r_0$$

考虑应力松弛后，屈服区扩大了一倍



有效裂缝长度

- 有效裂缝长度（平面应力）

$$a_{ef}=a+\frac{R}{2}=a+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_s}\right)^2$$

$$\overline{K}_I=\sqrt{\pi a}\sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)^2}$$

注：采用小范围屈服假设时，需要考虑使用条件

裂缝张开位移

- 线弹性情况，应力和应变线性关系，用应力判断和用位移判断都可以
- 弹塑性情况，应力不再随变形线性增加，用变形判断裂缝扩展
- COD: Crack opening displacement
- CTOD: Crack tip opening displacement

COD常用模型

- 小范围屈服模型 Wells公式
- 带状裂缝模型 D-B模型

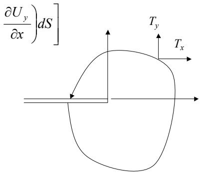
$$\delta=\frac{G_I}{\sigma_s}$$

J积分判据

- J积分的物理意义

$$J=\int_\Gamma\left[Wdy-\left(T_x\frac{\partial U_x}{\partial x}+T_y\frac{\partial U_y}{\partial x}\right)dS\right]$$

$$W=\int\sigma d\varepsilon$$

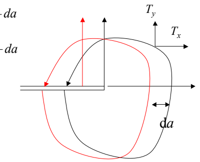


外加应力矢量在Γ上作的功

$$B\int_{\Gamma}\left(T_x dU_x + T_y dU_y\right)dS$$

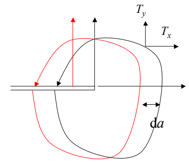
$$\begin{cases} dU_x = \dfrac{\partial U_x}{\partial x}dx + \dfrac{\partial U_x}{\partial y}dy = -\dfrac{\partial U_x}{\partial x}da \\ dU_y = \dfrac{\partial U_y}{\partial x}dx + \dfrac{\partial U_y}{\partial y}dy = -\dfrac{\partial U_y}{\partial x}da \end{cases}$$

$$-Bda\int_{\Gamma}\left(T_x\frac{\partial U_x}{\partial x} + T_y\frac{\partial U_y}{\partial x}\right)dS$$



域内应变能变化

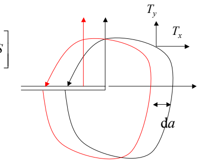
$$-B\int_{\Gamma}Wdxdy = +B\int_{\Gamma}Wdady$$



汇入域内的总能量

$$Bda\int_{\Gamma}\left[Wdy - \left(T_x\frac{\partial U_x}{\partial x} + T_y\frac{\partial U_y}{\partial x}\right)dS\right]$$

$$J = \int_{\Gamma}\left[Wdy - \left(T_x\frac{\partial U_x}{\partial x} + T_y\frac{\partial U_y}{\partial x}\right)dS\right]$$



说明

- J积分是一种能量判断准则
- J积分在线弹性条件下和积分路径无关，在非线性情况下，和积分路径的关系也不大

断裂力学在混凝土中的应用

- 计算应力强度因子
  - 有限元法
  - J积分法
  - 虚裂纹扩展法
- 测定混凝土的断裂指标
  - 弯曲梁试件
  - 紧凑拉伸试件

J积分求K_I

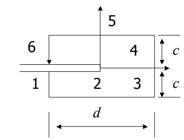
- 基于路径积分

$$J_\Gamma = 2\left[\int_0^c\left(\sigma_x\varepsilon_x + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dS + \int_0^d\left(\tau_{xy}\varepsilon_x + \sigma_y\frac{\partial v}{\partial x}\right)dS + \int_0^c\left(-\sigma_x\varepsilon_x - \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dS\right]$$

$$W = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right)$$

$$J_w = 2\left(\int_0^c W_4 dy + \int_c^0 W_6 dy\right)$$

$$J = J_w - J_\Gamma$$

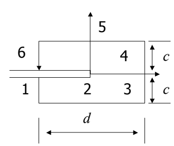


J积分求K_I

- 基于面积积分（稳定性比基于路径积分更好，格林变换）

$$J = \int_A\left(\sigma_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W\delta_{1i}\right)\frac{\delta q_i}{\delta x_1}dA$$

$$q = \begin{cases} 1 & \Gamma \\ 0 & \text{裂缝} \end{cases}$$



J积分和K_I的关系

$$J = \begin{cases} \dfrac{K_I^2}{E} & \text{平面应力} \\ \dfrac{(1-\nu^2)K_I^2}{E} & \text{平面应变} \end{cases}$$

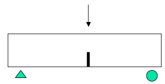
虚裂纹扩展法

- 计算当前结构的应变能U_1
- 在有限元模型中得到裂纹尖端
- 将裂纹尖端向前移动很小的一点da（单元尺寸的1/1000）
- 计算移动后结构的应变能U_2
- 将应变能之差除以裂纹扩展距离得到G

$$G=(U_2 - U_1)/\,da$$

弯曲梁实验

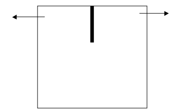
$$K_I = \frac{P}{Bd^{1/2}}[2.9\left(\frac{a}{d}\right)^{1/2} - 4.6\left(\frac{a}{d}\right)^{3/2} + 21.8\left(\frac{a}{d}\right)^{5/2} - 37.6\left(\frac{a}{d}\right)^{7/2} + 38.7\left(\frac{a}{d}\right)^{9/2}]$$



D_{max} (mm)	梁高d (mm)	梁宽B (mm)	梁跨L (mm)	梁长l (mm)	切口深 a (mm)
1~16	100±5	100±5	800±5	840±10	$\frac{d}{2}\pm5$
16.1~32	200±5	100±5	1130±5	1190±10	
32.1~48	300±5	150±5	1385±5	1450±10	
48.1~64	400±5	200±5	1600±5	1640±10	

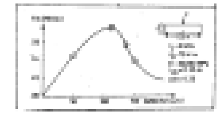
紧凑拉伸试件

$$K_{IC} = \frac{P}{B\sqrt{d}}\left[29.6\left(\frac{a}{d}\right)^{1/2} - 185.5\left(\frac{a}{d}\right)^{3/2} + 655.7\left(\frac{a}{d}\right)^{5/2} - 1017.0\left(\frac{a}{d}\right)^{7/2} + 638.9\left(\frac{a}{d}\right)^{9/2}\right]$$



断裂能测定

$$G_f = \frac{W_0 + mg\delta_0}{A}$$

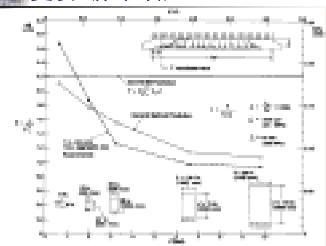


断裂能与混凝土尺寸效应

- 试件增大，微裂缝等增加，断裂能可能会提高

d (mm)	a (mm)	K_{IC} (MN/m$^{3/2}$)	相对比值
200	100	0.79	1.00
400	200	0.85	1.08
800	400	0.94	1.19
1200	600	1.19	1.51
1600	800	1.27	1.61
2000	1000	1.26	1.59

受剪破坏效应



混凝土断裂能经验公式

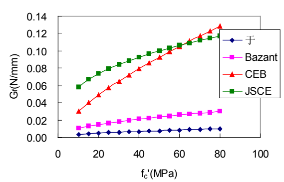
于 $K_{IC} = 2.86kf_t$

Bazant $G_f = (2.72 + 0.0214 f_t) f_t^2 \frac{D_{max}}{E_c}$

CEB $G_f = \alpha\left(\frac{f_c}{10}\right)^{0.7}$

JSCE $G_f = \frac{\sqrt[3]{D_{max} f_c'}}{100}$

断裂能比较



混凝土断裂力学使用范围

- 一般常用于大体积混凝土试件中
  - 大坝
- 混凝土微裂缝吸收的能量相比结构整体能量很小的时候

混凝土断裂行为的尺寸效应

- **Size effect of Concrete Strength (Bazant)**