

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

混凝土的开裂有限元分析

江见鲸 陆新征
清华大学土木工程系

2005

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

混凝土开裂分析方法

- 经典断裂力学方法
 - 优点: 理论严格
 - 缺点: 比较适用于金属和均匀材料, 不能分析大量裂缝
- 半经验半理论方法
 - 优点: 简单实用, 部分模型可以分析大量裂缝
 - 缺点: 经验成分多, 参数理论依据不足

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

混凝土断裂力学使用范围

- 一般常用于大体积混凝土试件中
 - 大坝
- 混凝土微裂缝吸收的能量相比结构整体能量很小的时候

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

半经验半理论方法

- 特点:
 - 以 f_t 为断裂标准 (思考: 应力集中.....)
 - 以 G_f 控制开裂后行为
- 表征裂缝的方式
 - 以单元边界表征
 - 以单元材料本构模型表征
 - 以特殊单元模型表征

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

混凝土受拉应力应变关系

卸载
裂缝闭合
再加载

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

简化的混凝土受拉软化关系

开裂应力 f_t
断裂能 G_f
下降段形状

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

处理裂缝的主要方式

- 分离裂缝模型
- 分布裂缝模型
- 内嵌裂缝单元模型

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

分离裂缝模型

- 将裂缝处理为单元边界, 一旦出现裂缝就调整节点位置或增加新的节点, 并重新划分单元网格, 使裂缝处于单元边界与边界之间。

裂缝尖端

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

分离裂缝模型的具体步骤

- 开裂标准和裂缝发展方向
- 裂缝发展与模型网格调整
- 裂面行为

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

开裂标准和裂缝发展方向

```

    graph TD
      A[主拉应力] --> B[虚拟裂缝模型]
      B --> C[断裂力学方法]
  
```

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

虚拟裂缝模型

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

虚拟裂缝算例

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

裂缝发展与模型网格调整

- 由于分离裂缝模型是使用单元边界来模拟裂缝，因此随着裂缝的发生和发展，需要不断调整单元网格划分。
- 对于裂缝路径明确的问题，可以采用预设裂缝的方法来模拟。
- 分离裂缝模型多用于分析只有一条或几条关键裂缝的素混凝土或少筋混凝土结构，例如水坝等。

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

预设裂缝

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

动态调整裂缝算例

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

裂面行为

- 为了模拟裂缝表面的闭合以及骨料咬合、钢筋销栓作用，可以在裂缝表面节点间布置一些切向和法向弹簧。

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

评述

- 分离裂缝模型的虽然历史悠久、概念清晰，但是由于混凝土结构中开裂问题的复杂性，以及网格重划分技术的限制，目前主要用于分析有少量裂缝的素混凝土结构，分析的问题也大部分是平面问题。在大坝、岩石等领域有着较多的应用。在通用有限元程序DIANA中，也集成了这种裂缝模型。

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

分布裂缝模型

- 分布裂缝模型的实质是将实际的混凝土裂缝“弥散”到整个单元中，将混凝土材料处理为各向异性材料，利用混凝土的材料本构模型来模拟裂缝的影响。这样一来，当混凝土某一单元的应力超过了开裂应力，则只需将材料本构矩阵加以调整，无需改变单元形式或重新划分单元网格，易于有限元程序实现，因此得到了非常广泛的应用。

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

初始开裂判断

- 开裂前，认为混凝土为弹性材料

$$D_{cr} = \begin{bmatrix} \frac{E_c}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \frac{E_c}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_c}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_c}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_c}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

- 当主拉应力达到开裂应力时，在垂直主拉应力的方向出现第一条裂缝

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

裂缝坐标下的应力应变矩阵

$$D_{cr}' = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu^2)}{\Delta} & \nu \frac{(1+\nu)}{\Delta} & \nu \frac{(1+\nu)}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta} \frac{E_c}{E_c - \nu^2} & \frac{\nu}{\Delta} \frac{E_c}{E_c - \nu^2} & \frac{\nu}{\Delta} \frac{E_c}{E_c - \nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta} \frac{E_c}{E_c - \nu^2} & \frac{\nu}{\Delta} \frac{E_c}{E_c - \nu^2} & \frac{1}{\Delta} \frac{E_c}{E_c - \nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & \frac{\eta E_c}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{E_c}{2(1+\nu)} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{\eta E_c}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \left[\frac{1}{E_c}(1-\nu^2) - \frac{2}{E_c}\nu^2(1+\nu) \right]$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

忽略开裂条件下泊松比

$$D_{cr}' = \begin{bmatrix} E_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_c & \nu E_c \\ \nu E_c & E_c \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\eta E_c}{2(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\eta E_c}{2(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_c}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_c}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\eta E_c}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

应力应变关系和迭代矩阵

- 裂缝坐标系下的应力增量为：

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma_{11} \\ \Delta\sigma_{22} \\ \Delta\sigma_{33} \\ \Delta\sigma_{12} \\ \Delta\sigma_{13} \\ \Delta\sigma_{23} \end{bmatrix} = D_{cr}' \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_{11} \\ \Delta\epsilon_{22} \\ \Delta\epsilon_{33} \\ \Delta\gamma_{12} \\ \Delta\gamma_{13} \\ \Delta\gamma_{23} \end{bmatrix}$$

- 为了防止过大的负刚度导致计算不收敛，一般整体迭代计算不使用切线刚度矩阵，一般加以适当修正

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

坐标转换矩阵

- 混凝土开裂计算时需要进行坐标转换，在裂缝方向建立应力应变关系。在求解单元刚度矩阵的时候还要转回到整体坐标系中去。
- 整体坐标系下刚度矩阵 $[D_{cr}] = [R]^T [D_{cr}'] [R]$

$$[R] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & l_1 m_3 + l_3 m_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 & n_1 l_3 + n_3 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \end{bmatrix}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

评述

- 分布裂缝模型因为将单个的裂缝连续化，不需要改变有限元网格划分，特别适用于有限元分析，因而在各个有限元软件中都得到了广泛的应用，各种非线性有限元软件都或多或少采用了分布裂缝模型
- 对于正常配筋的大型混凝土构件，分布裂缝模型在一定程度上更接近工程实际情况（比分离裂缝模型），分析结果也较好

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

固定裂缝模型与转动裂缝模型

- 分布裂缝模型中，一般认为，当单元内部的最大拉应力达到开裂应力时，混凝土即开裂
- 混凝土开裂后，改变混凝土材料为各向异性材料，主应力和主应变方向可能不再一致。同时，初始裂缝方向和主应力方向也不再一致，裂缝表面将出现剪应力

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

固定裂缝模型

- 认为混凝土开裂后，裂缝方向将永远保持不变，即R矩阵始终不变
- 计算过程中首先将应力应变通过R矩阵转换到裂缝坐标系下，计算此时的正应力、正应变和剪应力、剪应变，以及裂缝坐标系下的本构矩阵。迭代求解得到新的荷载步的应力应变关系。
- 一个积分点最多出现3条彼此垂直的裂缝

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

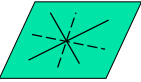
开裂单元

Physical state with multiple cracks Model with single crack

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

多裂缝模型

- 当主应力方向和裂缝方向差距较大时，由于剪面剪力锁死往往导致出现错误结果
- 多裂缝模型认为当主应力方向和裂缝方向夹角超过一定范围 θ 后，原有的裂缝闭合，重新在新的主应力方向生成新的裂缝
- $\theta = 30$ 度 (6裂缝模型) 45度 (4裂缝模型)



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

转动裂缝模型

- 如果多裂缝模型中的 $\theta = 0$ 度，则主应力方向和裂缝方向始终一致，这种裂缝模型被称作转动裂缝模型。
- 如果要求主应力方向保持和主应变方向一致，则 $G = \frac{\sigma_m - \sigma_n}{2(\epsilon_m - \epsilon_n)}$

该模型被称为共轴转动裂缝模型

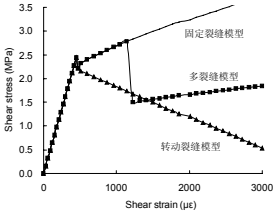
清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

剪力锁死

- 由于固定裂缝模型中切线剪切模量 G' 始终大于零，使得裂缝表面的剪应力随剪切应变增加而只能增大，无法模拟裂缝的剪切软化问题
- 多裂缝模型和转动裂缝模型可以较好解决这一问题，在分析混凝土受剪构件，以及一些混凝土第二类断裂问题时，往往转动裂缝模型结果要优于固定裂缝模型。

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

开裂混凝土受剪行为

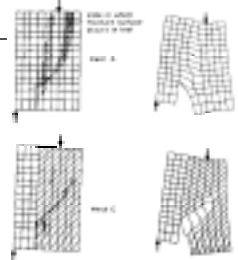


清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

网格依赖性

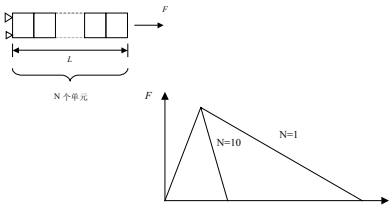
- 在长期应用与研究中发现，分布裂缝模型裂缝比较容易沿着网格划分方向发展，这种现象被称为网格依赖性。

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

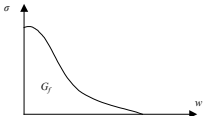
单元尺寸效应



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

裂缝带模型

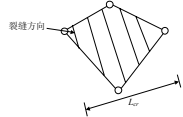
- 即混凝土的受拉软化不再以应力应变曲线的形式来定义，而以应力-裂缝宽度曲线来定义
- 裂缝宽度定义为 $w = \epsilon_{cr} L_{cr}$ ，这里 ϵ_{cr} 为开裂应变， L_{cr} 称为裂缝带宽



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

L_{cr} 的定义

- 对于单元尺寸小于3~4倍骨料粒径的情况最为合适



$L_{cr} = \sqrt{A}$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

裂面剪力传递系数

- 在固定裂缝模型中，裂面剪力传递系数是一个比较复杂的问题。
- 简单处理一般假定裂面剪力传递系数为0~1的常量
- 在没有更仔细的数据之前，一般建议，对于普通钢筋混凝土梁取0.5，钢筋混凝土深梁取0.25，对于剪力墙取0.125试算。

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

可变的裂面剪力传递系数

- Rots模型** $G^* = \beta G_0 = G_0 / (1 + 4447 \epsilon_{cr}^{cr})$
- Al-mahiaha模型** $G^* = \beta G_0 = \frac{0.4}{\epsilon_{cr}^{cr} / 200 \mu\epsilon} G_0$
- 大连理工模型**

$$\tau_{cr} = (0.543w^{-0.585} + 0.199)\sqrt{f_c} \Delta^{0.72}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

对混凝土梁受剪的影响

- 无腹筋混凝土梁，剪跨比2，起筋
- 对比不同的剪力传递模型

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

内嵌裂缝单元模型

- 内嵌裂缝单元模型的基本思路是在普通单元的形函数上叠加一个阶跃函数或突变函数，来模拟裂缝引起的应变非连续性。
- 如果叠加的是阶跃函数，则又被成为强非连续模型，如果叠加的是一个突变函数，则被成为是弱非连续模型。

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

Benchmark for FE results

- Beam LS60-2a tested by Lu & Sun, 2004

Width (mm)	Height (mm)	Length (mm)	Cube strength (MPa)	Elastic modulus (GPa)	Shear reinforcement ratio	Tension reinforcement ratio	Compression reinforcement ratio	Shear span (mm)	Effective height (mm)
150	300	2100	54.98	22.8	0	2.81%	1.88%	540	270

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

Finite Element Model

- Drucker-Prager Elasto-Plastic model
- Difference post-crack model for RC and plain concrete
- Beam elements for rebar
- No contact for supports
- No slip between rebar and concrete

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

Crack pattern comparison

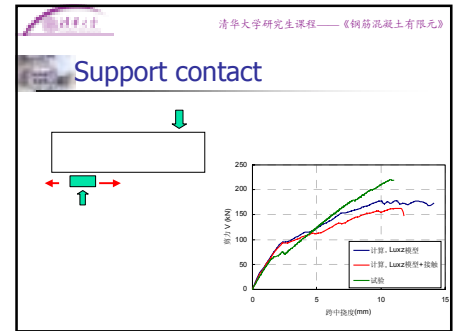
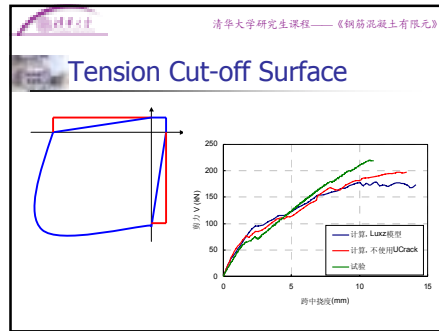
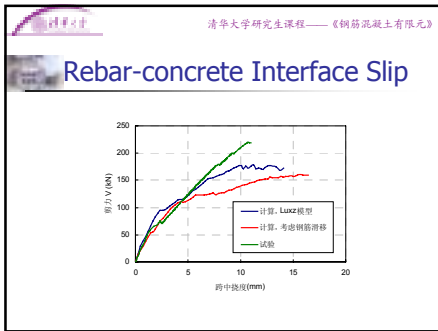
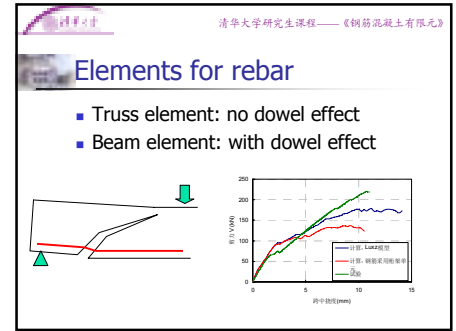
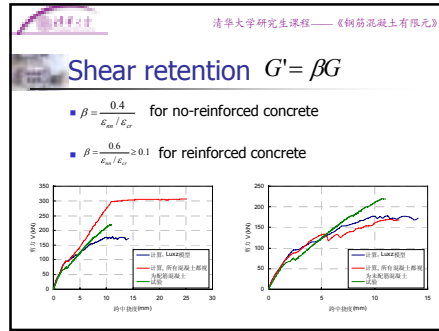
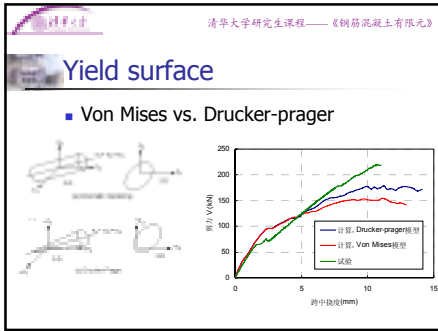
清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

Load-displacement curves

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

Detailed case studies

- Yield surface
- Shear retention
- Element for rebar
- Concrete Yang's modulus
- Rebar slip
- Tension cut-off
- Contact
-



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

Discussions

- What we need for modeling a RC structure?
- “So much owned so many to so few”
- $G_f, f_c, f_t, E_c, \dots$