

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

非线性方程组的解法

江见鲸 陆新征
清华大学土木工程系
2005

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

非线性问题分类

- 几何非线性
- 材料非线性
- 边界非线性

Nature is nonlinear;
the best design use nature as an ally

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

几何非线性

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

大应变问题

- 小应变 $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$
- 大应变 $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

大位移问题

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

材料非线性

- 塑性
- 非线性弹性
- 粘弹性
- 粘塑性
- 断裂
- 损伤
- 徐变

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

边界非线性

- 接触非线性
- 单元非线性

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

非线性方程（组）求解

- 每个非线性有限元问题，都包含有两类非线性方程（组）的计算
- 单元刚度矩阵
- 整体刚度矩阵

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

单元刚度矩阵

- 一般，已知 ${}^tF^e$ ${}^t\delta^e$ $\Delta\delta^e$
- 求 ${}^{t+\Delta t}F^e$

$$\{{}^{t+\Delta t}F^e\} = \{{}^tF^e\} + [K^e]\{\Delta\delta^e\}$$

$$[K^e] = f({}^tF^e, {}^t\delta^e, \Delta\delta^e)$$
- 对于仅材料非线性
$$[K^e] = \int B^T DBdV = \int B^T f({}^t\sigma^e, {}^t\epsilon^e, \Delta\epsilon^e) B dV$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

整体刚度矩阵

- 已知 $\{F\}, \{\delta\}, \Delta F$
- 求 $\{e+n\}\delta\} = \{\delta\} + [K]^{-1}\{\Delta F\}$

$$[K] = \sum [K^e]$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

一般计算过程

- 形成单元刚度矩阵
- 计算整体刚度矩阵
- 计算位移增量
- 计算单元应变增量
- 计算单元应力增量 (非线性求解1)
- 计算总内力
- 计算不平衡内力

非线性求解2

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

非线性方程组的解法

- 基本思路: 分段线性化方法, 将荷载划分成很多小步, 逐步施加
- 具体操作方法:
 - 显式求解法 (增量法)
 - 隐式求解法 (迭代法)

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

显式求解法


- 将荷载分成若干小步, 逐步施加
- 认为在每个小步中, 结构是线性的, 同一荷载步的刚度矩阵相同
- 不同荷载步的刚度矩阵可以不同
- 用一系列的折线去近似曲线

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

欧拉折线法(Forward Euler Method)

$$[P_n] = \sum [\Delta P_i]$$

$$[\delta_n] = [\delta_{n-1}] + [\Delta \delta_n]$$

$$[\Delta \delta_n] = [K_{n-1}]^{-1} [\Delta P_n]$$


清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

计算步骤 (对于单元刚度矩阵)

- 已知当前应力、应变
- 根据当前应力应变求当前的切线刚度
- 根据当前切线刚度求单元刚度矩阵
- 根据单元刚度矩阵和应变增量求应力增量

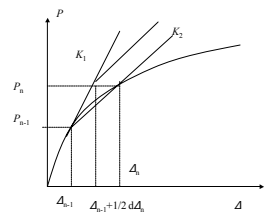
清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

计算步骤 (对于整体刚度矩阵)

- 已知当前单元的切线刚度矩阵
- 形成整体刚度矩阵
- 根据荷载增量求位移增量

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

修正的欧拉折线法(Mid-point Method)



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

单元刚度矩阵

- 已知应力, 应变, 应变增量 $\{d\epsilon_n\}$
- 根据当前应力应变求切线刚度矩阵
- 求中点应力 $\{\sigma_n'\} = \{\sigma_{n-1}\} + [K_{n-1}] \frac{\{d\epsilon_n\}}{2}$
- 根据中点应力和应变 $\{\sigma_n'\}, \{\epsilon_{n-1}\} + \frac{\{d\epsilon_n\}}{2}$ 求此时的切线刚度矩阵 $[K_{n-1}]$
- 得到最终单元应力 $\{\sigma_n\} = \{\sigma_{n-1}\} + [K_{n-1}] \{d\epsilon_n\}$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

整体刚度矩阵

- 已知当前荷载 P_{n-1} ，位移 Δ_{n-1} ，荷载增量 dP_n
- 根据当前荷载和位移求得当前切线刚度矩阵 $[K_{n-1}]$
- 根据当前切线刚度矩阵求解当增加 $1/2dP_n$ 增量时的位移增量 $d\Delta_n$
- 根据 $P_{n-1} + 1/2dP_n$ 和 $\Delta_{n-1} + d\Delta_n$ 求得此时切线刚度 $[K_{n-1}']$
- 总位移增量为: $d\Delta_n = [K_{n-1}']^{-1} dP_n$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

评述

- 显式求解法(增量法)的误差是逐步累积的
- 通过减小小步长的方法可以提高精度
- 不需要迭代, 不存在收敛问题
- 一些研究者推荐在单元刚度矩阵部分采用显式求解, 在整体刚度矩阵部分采用隐式求解

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

隐式方法

- 根据计算方法
 - 割线刚度法
 - 切线刚度法 (Full Newton-Raphson)
 - 等刚度法
 - 改进的切线刚度法(Modified NR)
- 同样有单元刚度矩阵和整体刚度矩阵的迭代问题。

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

割线刚度法

$$[\delta_1] = [K_0]^{-1} [P]$$

$$[\delta_1] \rightarrow [K_1]$$

$$[\delta_2] = [K_1]^{-1} [P]$$

.....

$$[\delta_n] = [K_{n-1}]^{-1} [P]$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

评述

- 概念简单, 对于比例加载的全量模型尤其适用
- 当出现卸载或往复荷载时可能不适合

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

切线刚度法(Full NR)

$$[\delta_1] = [K_0]^{-1} [P]$$

$$[\delta_1] \rightarrow [P_1^{internal}] \rightarrow [K_1]$$

$$[\Delta P_1] = [P] - [P_1^{internal}]$$

$$[\Delta \delta_1] = [K_1]^{-1} [\Delta P_1]$$

$$[\delta_2] = [\delta_1] + [\Delta \delta_1]$$

.....

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

评述

- 理论上收敛速度最快
- 每次迭代都要形成刚度矩阵
- 当接近屈服时, 或者出现软化时, 切线刚度矩阵斜率特别小甚至不是正定矩阵, 往往带来收敛的困难

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

等刚度法

$$[\delta_1] = [K_0]^{-1} [P]$$

$$[\delta_1] \rightarrow [P_1^{internal}]$$

$$[\Delta P_1] = [P] - [P_1^{internal}]$$

$$[\Delta \delta_1] = [K_0]^{-1} [\Delta P_1]$$

$$[\delta_2] = [\delta_1] + [\Delta \delta_1]$$

.....

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

评述

- 收敛速度相对较慢
- 不需每次都形成新的刚度矩阵
- 在切线刚度矩阵奇异时效果有时要优于切线刚度法

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

改进的切线刚度法(Modified NR)

- 不是每次迭代都改变刚度矩阵，而是迭代一定次数后，再改变刚度矩阵

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

弹塑性分析的应力更新算法

复习

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

应力更新显式算法

- 计算步骤
 - 上一步单元已经屈服，加载后仍未屈服，使用弹性本构矩阵 D_e
 - 上一步单元已经屈服，加载后仍然屈服，使用弹塑性本构矩阵 D_{ep}
 - 上一步单元处于弹性，加载后单元屈服，处于过渡状态，使用加权组合方法 $D = mD_e + (1-m)D_{ep}$

$$m = \frac{\bar{\epsilon}_e - \bar{\epsilon}_{e-1}}{\bar{\epsilon}_e - \bar{\epsilon}_{e-1}}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

图示

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

应力更新隐式算法

- Backward Euler 算法
 - 输入 $\sigma_i^k, \epsilon_i^{k+1}, \Delta \epsilon_i^k$
 - 首先计算弹性应力增量: $\sigma_i^k = \sigma_i^{k-1} + D_{i,el} \Delta \epsilon_i^k$
 - 判断是否屈服: $f_i^k = F(\sigma_i^k, \epsilon_i^{k+1}), \Delta \lambda_i = 0$
 - 如果大于屈服应力: $f_i^k > 0$
 - 计算屈服面法线方向: $m_i = \frac{\partial G^k(\sigma_i^k)}{\partial \sigma_i}$
 - 返回屈服面: $F^k(\sigma_i^k - \Delta \lambda_i D_i, m_i, \epsilon_i^{k+1}) = 0 \Rightarrow \Delta \lambda_i$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

积分步骤

判断是否屈服: $f_i^k = F^k(\sigma_i^k - \Delta \lambda_i D_i, m_i, \epsilon_i^{k+1} + \Delta \lambda_i m_i)$

迭代计算 0) 直至 $|\Delta \lambda_i - \Delta \lambda_{i-1}| < \epsilon$

计算新的塑性增量: $\Delta \lambda_i = \lambda_i - f_i^k \frac{\Delta \lambda_i - \Delta \lambda_{i-1}}{f_i^k - f_{i-1}^k}$

计算新的投影方向: $m_i^{k+1} = \frac{\partial G^k(\sigma_i^k - \Delta \lambda_i D_i, m_i^{k+1})}{\partial \sigma_i}$

计算屈服函数: $f_i^k = F^k(\sigma_i^k - \Delta \lambda_i D_i, m_i^{k+1}, \epsilon_i^k + \Delta \lambda_i m_i^{k+1})$

修正迭代变量:

$f_i^k < 0 \Rightarrow f_i^k = f_i^k, \Delta \lambda_i = \Delta \lambda_i$

$f_i^k \geq 0 \Rightarrow f_i^k = f_i^k, \Delta \lambda_i = \Delta \lambda_i, f_i^k = f_i^k, \Delta \lambda_i = \Delta \lambda_i$

迭代结束

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

收敛标准

- 判断对象
 - 力收敛标准
 - 位移收敛标准
 - 能量收敛标准
- 判断标准
 - 相对误差
 - 绝对误差
- 范数
 - 无穷范数
 - 一范数
 - 二范数

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

范数

- 无穷范数 $\|V\|_\infty = \max |V_i|$
- 一范数 $\|V\|_1 = \sum |V_i|$
- 二范数 $\|V\|_2 = \sqrt{\sum V_i^2}$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

相对误差和绝对误差

- 相对误差

$$e = \frac{\|\delta V\|}{\|V\|}$$
- 绝对误差

$$e = \frac{\|\delta V\|}{\text{constant}}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

力收敛标准

- 一般以不平衡力作为分析对象，以节点反力或荷载作为参考标准

$$\frac{\| \text{节点不平衡力} \|}{\| \text{支反反力或荷载} \|} < \text{误差容限}$$

- 一般推荐使用2范数，也有使用无穷范数的 (MARC)

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

位移收敛标准

- 一般以位移增量为分析对象，以同级荷载作用下总节点位移为参考标准

$$\frac{\| \text{某次迭代位移改变量} \|}{\| \text{同级荷载节点总位移} \|} < \text{误差容限}$$

- 一般使用无穷范数

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

能量收敛标准

- 一般以某次迭代的应变能增量为分析对象，以同级荷载作用下总应变能为参考标准

$$\frac{\| \text{某次迭代应变能改变量} \|}{\| \text{同级荷载总应变能} \|} < \text{误差容限}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

注意事项

- 当结构出现屈服时，或者接触分析中发生分离时，往往荷载变化很小而位移变化很快，这时位移标准要好于力标准
- 当结构出现跳跃时，或者接触刚刚发生时，往往位移变化很小和荷载迅速增大。这时力标准要好于位移标准
- 当结构发生分离或者卸载到零时，往往外力已经非常小（几乎为零）。这时使用相对误差判断往往会进行很多不必要的计算，应使用绝对误差判断。

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

考虑负刚度的计算方法

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

负刚度带来的主要问题

- 刚度矩阵不再是正定矩阵，很多迭代算法的收敛性不再得到保证
- 刚度矩阵存在奇异点（切线刚度为零），求逆可能失败
- 出现“分叉点”现象，在分叉点两侧来回跳动无法收敛
- 出现损伤集中，应变集中问题

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

解决负刚度问题的主要思路

- 人为引进一些刚度元素，使整体刚度矩阵仍然保持或接近正定
 - 虚拟弹簧法
- 采取某种措施使程序能够自动降低荷载大小
 - 位移控制法
 - 弧长法
- 放松在极值点附近的收敛检查
 - 增量法
 - 强制迭代法

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

虚拟弹簧法

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

位移控制法

- 以位移来加载
- 控制关键节点的位移变化来决定施加荷载的大小
- 使用Lagrange法或罚函数法来控制指定节点位移
 - 注：Lagrange法可能会导致刚度矩阵不对称
 - 罚函数法可能会增大矩阵病态

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

弧长法

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

特点

- 同时控制位移和荷载增量，能较好地跟踪整个结构的反应
- 比较适用于几何非线性问题，特别是稳定问题

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

基本方程

$$F(\Delta \mathbf{x}) = \Delta \mathbf{f}$$

$$F(\Delta \mathbf{x}) = \lambda \Delta \mathbf{f}$$

$$\lambda^2 \|\Delta \mathbf{f}\|_2^2 + \|\Delta \mathbf{x}\|_2^2 = S^2$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

计算过程

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_k) \Delta \mathbf{x}_k = \lambda_k \Delta \mathbf{f} + \mathbf{R}_k$$

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \lambda \|\Delta \mathbf{f}\|_2 \\ \Delta \mathbf{x} \end{Bmatrix}$$

$$\|\mathbf{r}\|_2 = S$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

$$\mathbf{r}^{(i+1)} = \mathbf{r}^{(i)} + \Delta \mathbf{u}^{(i+1)}$$

$$(\mathbf{r}^{(i)} + \Delta \mathbf{u}^{(i+1)}) \cdot (\mathbf{r}^{(i)} + \Delta \mathbf{u}^{(i+1)}) = S^2$$

$$\mathbf{r}^{(i)} \cdot \mathbf{r}^{(i)} = S^2$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(i+1)} \cdot (\Delta \mathbf{u}^{(i+1)} + 2\mathbf{r}^{(i)}) = 0$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(i+1)} \cdot \Delta \mathbf{u}^{(i+1)} = [\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}]^T [\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}] + (\Delta \lambda^{(i+1)} \|\Delta \mathbf{f}\|_2)^2$$

$$\mathbf{r}^{(i)} \cdot \mathbf{r}^{(i)} = [\Delta \mathbf{x}^{(i)}]^T [\Delta \mathbf{x}^{(i)}] + (\Delta \lambda^{(i)} \|\Delta \mathbf{f}\|_2)^2$$

$$[\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}]^T \cdot (\Delta \mathbf{x}^{(i+1)} + 2\mathbf{x}^{(i)} + \Delta \lambda^{(i+1)} \|\Delta \mathbf{f}\|_2 (\Delta \lambda^{(i+1)} \|\Delta \mathbf{f}\|_2 + 2\lambda^{(i)} \|\Delta \mathbf{f}\|_2)) = 0$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

$$[\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}] = \Delta \lambda^{(i+1)} [\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}] + [\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}]_p$$

$$[\mathbf{K}^{(i)}] [\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}]_p = [\Delta \mathbf{f}]$$

$$[\mathbf{K}^{(i)}] [\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}]_p = [\mathbf{R}^{(i)}]$$

$$a(\Delta \lambda^{(i+1)})^2 + 2\Delta \lambda^{(i+1)} + c = 0$$

$$a = 1 + [\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}]^T [\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}]$$

$$b = \lambda^{(i)} + [\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}]^T ([\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}]_p + [\mathbf{x}^{(i)}])$$

$$c = [\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}]_p^T ([\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}]_p + 2[\mathbf{x}^{(i)}])$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

$$\mathbf{r}^{(i)} + \Delta \mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{0}$$

$$[\mathbf{x}^{(i)}]^T \cdot [\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}] + \lambda^{(i)} \Delta \lambda^{(i+1)} \|\Delta \mathbf{f}\|_2^2 = 0$$

$$\Delta \lambda^{(i+1)} = - \left(\frac{[\mathbf{x}^{(i)}]^T \cdot [\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}]_p}{[\mathbf{x}^{(i)}]^T \cdot [\Delta \mathbf{x}^{(i+1)}] + \lambda^{(i)} \|\Delta \mathbf{f}\|_2^2} \right) \frac{1}{\|\Delta \mathbf{f}\|_2}$$