杆系有限元模型

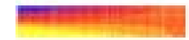
江见鲸 陆新征
清华大学土木工程系
2005

钢筋混凝土结构

- 以实体结构为主
- 以杆系结构为主


结构尺度

- 构件分析
  - 可以采用实体模型
  - 也可以采用杆件模型

整体结构

- 建筑结构大多采用杆件模型


杆系有限元模型

- 基本单元
  - 梁单元
  - 桁架单元
- 建模要点
  - 实际构件如何简化为杆系单元?
  - 如何建立杆系单元的本构关系?

框架结构

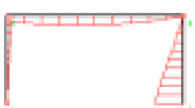
- 可以直接离散为杆件体系
- 注意节点区可能需要用刚域或者其他方法加以考虑
- 核心问题
  - 如何建立合适的单元刚度集成方法
  - 如何建立合适的单元本构滞回关系

框架结构

$$K = f(F, \Delta, t)$$

杆件单元的内力、位移在不同截面是不同的

整个单元的刚度需要由不同截面的刚度加以积分得到

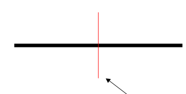


单元刚度积分方法

- 单点积分法
- 高斯积分法
- 矩形积分法

单点积分方法

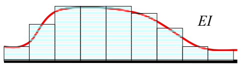
- 选取构件上的典型截面，得到截面的抗弯、抗压、抗扭刚度
- 认为整个构件的刚度都等于该截面的刚度



$$M_i, \phi_i \Rightarrow EI_i \Rightarrow EI^e$$

单点积分方法

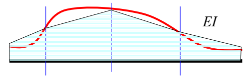
- 适用条件
  - 单元内力、变形比较均匀
  - 单元内部刚度比较均匀‘
- 细分单元的方法，采用单点积分方法



高斯积分方法

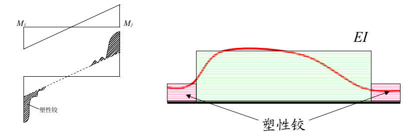
- 在单元上选取若干典型截面
- 得到各个典型截面的刚度
- 按一定的积分规则，得到整个构件的总刚度

$$M_i,\phi_i \Rightarrow EI_i \Rightarrow EI^e = \int w_i EI_i$$



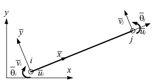
矩形积分方法

- 对于有集中损伤的问题，可以采用矩形积分方法
- 典型的矩形积分方法就是带塑性铰的梁模型



杆件刚度矩阵

- 普通平面梁单元



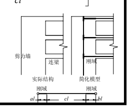
$$[\bar{K}^e]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$[T]=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^e]=[T]^T[\bar{K}^e][T]$$

带刚域的梁单元

$$[\bar{K}^e]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(cl)^3} & -\frac{6EI}{(cl)^2}(1+2a) & 0 & -\frac{12EI}{(cl)^3} & -\frac{6EI}{(cl)^2}(1+2b) \\ 0 & -\frac{6EI}{(cl)^2}(1+2a) & \frac{4EI}{cl}(1+3a+3a^2) & 0 & \frac{6EI}{(cl)^2}(1+2a) & \frac{2EI}{cl}[1+3(a+b)+6ab] \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{(cl)^3} & \frac{6EI}{(cl)^2}(1+2a) & 0 & \frac{12EI}{(cl)^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{(cl)^2}(1+2b) & \frac{2EI}{cl}[1+3(a+b)+6ab] & 0 & \frac{6EI}{(cl)^2}(1+2b) & \frac{4EI}{cl}(1+3b+3b^2) \end{bmatrix}$$



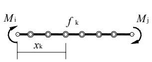
考虑剪切变形的梁单元

$$[\bar{K}^e]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12i}{(1+\beta)l^2} & -\frac{6i}{(1+\beta)l} & 0 & -\frac{12i}{(1+\beta)l^2} & -\frac{6i}{(1+\beta)l} \\ 0 & -\frac{6i}{(1+\beta)l} & \frac{4+\beta}{1+\beta}i & 0 & \frac{6i}{(1+\beta)l} & \frac{2-\beta}{1+\beta}i \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12i}{(1+\beta)l^2} & \frac{6i}{(1+\beta)l} & 0 & \frac{12i}{(1+\beta)l^2} & \frac{6i}{(1+\beta)l} \\ 0 & -\frac{6i}{(1+\beta)l} & \frac{2-\beta}{1+\beta}i & 0 & \frac{6i}{(1+\beta)l} & \frac{4+\beta}{1+\beta}i \end{bmatrix}$$

$$\beta=\frac{12\nu EI}{GAl^2}$$

串连变刚度模型

$$\Delta M(x)=\left(1-\frac{x}{l}\right)\Delta M_i-\left(\frac{x}{l}\right)\Delta M_j$$

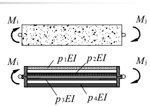


$$\begin{Bmatrix}\Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{ii} & f_{ij} \\ f_{ji} & f_{jj}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta M_i \\ \Delta M_j\end{Bmatrix}$$

$$f_{ii}=\int_L \mathrm{d}\left[(1-\frac{x}{l})^2 f(x)\right] \qquad f_{ij}=-\int_L \mathrm{d}\left[(1-\frac{x}{l})(\frac{x}{l})f(x)\right]$$

$$f_{jj}=\int_L \mathrm{d}\left[(\frac{x}{l})^2 f(x)\right]$$

并联杆模型



（1） 弯曲刚度等于 p_1EI 的弹性杆

$$\begin{Bmatrix}\Delta M_i \\ \Delta M_j\end{Bmatrix}=\frac{p_1EI}{l}\begin{bmatrix}4 & 2 \\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j\end{Bmatrix} \qquad (8.29)$$

（2） 弯曲刚度等于 p_2EI，且在 i 端有塑性铰的杆，因为 i 端弯矩为零，所以

$$\begin{Bmatrix}\Delta M_i \\ \Delta M_j\end{Bmatrix}=\frac{p_2EI}{l}\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j\end{Bmatrix} \qquad (8.30)$$

（3） 弯曲刚度等于 p_3EI，且在 j 端有塑性铰的杆

$$\begin{Bmatrix}\Delta M_i \\ \Delta M_j\end{Bmatrix}=\frac{p_3EI}{l}\begin{bmatrix}3 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j\end{Bmatrix} \qquad (8.31)$$

（4） 弯曲刚度为 p_4EI，且两段都有塑性铰的杆

$$\begin{Bmatrix}\Delta M_i \\ \Delta M_j\end{Bmatrix}=\frac{p_4EI}{l}\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j\end{Bmatrix} \qquad (8.32)$$

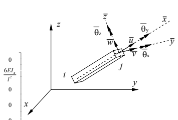
各个并联杆的变形协调，转角和实际杆件相同，因此，原杆件的增量刚度矩阵为

$$\begin{Bmatrix}\Delta M_i \\ \Delta M_j\end{Bmatrix}=\frac{EI}{l}\begin{bmatrix}4p_1+3p_3 & 2p_1 \\ 2p_1 & 4p_1+3p_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j\end{Bmatrix} \qquad (8.33)$$

空间梁单元

- 重点
  - 单元坐标转换

$$[K^e]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ & & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ & & & \frac{GI_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_p}{l} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\ & & & & & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\ & & & & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ & & \text{sym} & & & & & & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{GI_p}{l} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}$$



$$[t]=\begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3\end{bmatrix}$$

单元恢复力模型

- 相当于实体单元分析的材料本构模型
- 恢复力模型
  - 广义应力——广义应变关系

$$\begin{Bmatrix}\sigma\\ \tau\end{Bmatrix}=\mathbf{D}\begin{Bmatrix}\varepsilon\\ \gamma\end{Bmatrix}\qquad \begin{Bmatrix}N\\ M\end{Bmatrix}=\mathbf{D}\begin{Bmatrix}\varepsilon\\ \phi\end{Bmatrix}\qquad \begin{Bmatrix}N\\ M\end{Bmatrix}=\mathbf{D}\begin{Bmatrix}\Delta\\ \theta\end{Bmatrix}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

三种不同层次的恢复力模型

- 基于材料的恢复力模型

$$\begin{Bmatrix}\sigma\\ \tau\end{Bmatrix}=\mathbf{D}\begin{Bmatrix}\varepsilon\\ \gamma\end{Bmatrix}$$

- 基于截面的恢复力模型

$$\begin{Bmatrix}N\\ M\end{Bmatrix}=\mathbf{D}\begin{Bmatrix}\varepsilon\\ \phi\end{Bmatrix}$$

- 基于构件的恢复力模型

$$\begin{Bmatrix}N\\ M\end{Bmatrix}=\mathbf{D}\begin{Bmatrix}\Delta\\ \theta\end{Bmatrix}$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

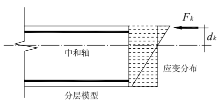
基于材料的恢复力模型

- 要点
  - 从杆端力/位移→截面内力/变形→材料应力/应变
  - 从材料应力/应变→截面内力/变形→杆端力/位移
- 实现方法
  - 平截面假定
  - 纤维模型积分
- 例如
  - OpenSee，Canny

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

分层模型

- 平面杆件



$$\varepsilon_k=\varepsilon_N+\phi d_k$$

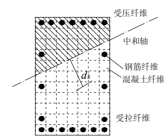
$$\sum F_k=N$$

$$\sum F_k d_k=M$$

清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

纤维模型

- 空间杆件



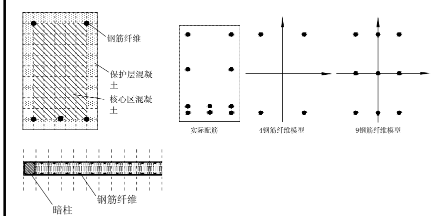
$$\varepsilon_k=\varepsilon_N+\phi d_k$$

$$\sum F_k=N$$

$$\sum F_k d_k=M$$

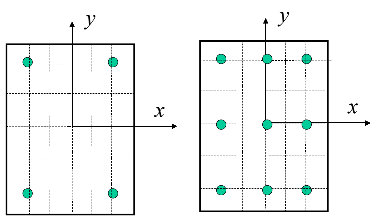
清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

截面分区



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

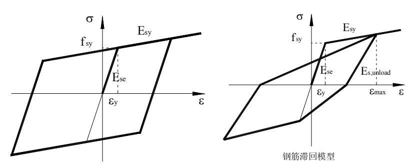
示例



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

材料滞回关系

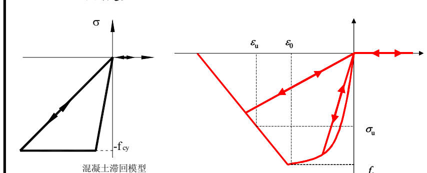
- 钢筋



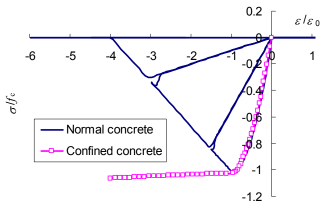
清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

材料滞回关系

- 混凝土



材料滞回关系模拟



纤维模型的优点

- 自动考虑轴力——弯矩相互关系
- 基于材料模型——可以考虑复杂的材料滞回关系
- 截面分区——建模有更大的灵活度

纤维模型的几个重要问题

- 平截面假定
  - 钢筋和混凝土之间的滑移问题
- 单轴模型
  - 纤维变形、损伤互相影响的问题
- 杆件模型
  - 剪切破坏问题

基于截面的恢复力模型

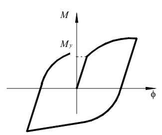
- 适用于轴力变化不大或者轴力变化比较有规律的构件
- 可以直接根据试验的弯矩曲率关系建立截面模型
- 可以隐含考虑钢筋滑移、塑性内力重分布、损伤累积等效果

典型的单向弯矩曲率关系

- Ramberg-Osgood模型

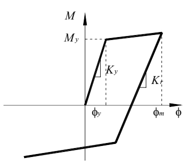
$$\frac{\phi}{\phi_y}=\frac{M}{M_y}\left(1+\left|\frac{M}{M_y}\right|^{\alpha_r-1}\right)$$

$$\frac{\phi-\phi_0}{2\phi_y}=\frac{M-M_0}{2M_y}\left(1+\left|\frac{M}{M_y}\right|^{\alpha_r-1}\right)$$



典型的单向弯矩曲率关系

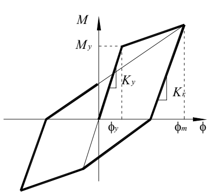
- 双线性模型



典型的单向弯矩曲率关系

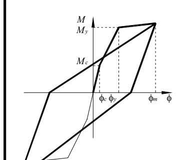
- Clough模型

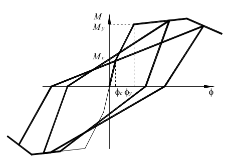
$$k_r=k_i\left|\frac{\phi_m}{\phi_y}\right|^{-\alpha_k}$$



典型的单向弯矩曲率关系

- Clough模型的变种



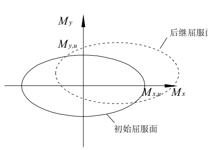


双向弯曲的弯矩曲率关系

- 双向弯曲存在弯曲相关性

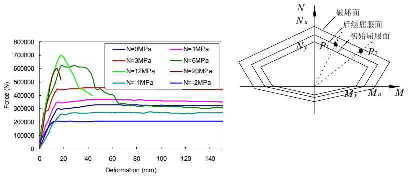
$$\left(\frac{M_x}{M_{x,u}}\right)^{\alpha_n}+\left(\frac{M_y}{M_{y,u}}\right)^{\alpha_n}=1$$

注意：往复加载的硬化规则



变轴力影响的弯矩曲率关系

- 轴力变化带来弯矩曲率关系的变化



评述

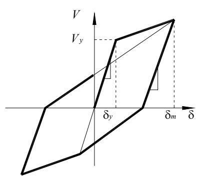
- 基于截面的恢复力模型在描述比较规律的截面行为时，其精度要优于纤维模型，且建模难度也往往较小
- 面临的问题：
  - 复杂的轴力－双向弯矩关系
  - 复杂的加卸载准则
  - 软化问题

基于构件的恢复力模型

- 对于受力比较明确的杆件，可以直接给出杆端力－杆端变形关系
- 要求：
  - 构件受力行为明确
- 优点
  - 简单，特定结构更有效

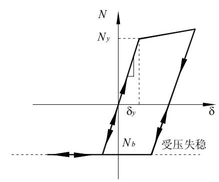
基于构件的恢复力模型

- 层间剪切变形的恢复力模型



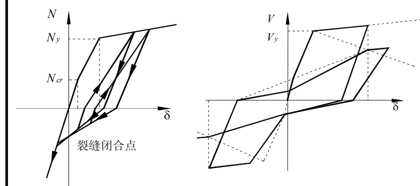
基于构件的恢复力模型

- 考虑受压失稳的支撑模型



基于构件的恢复力模型

- 轴向及切向组合弹簧模型



剪力墙模型

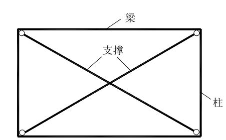
- 框架建模简单，剪力墙建模复杂
- 剪力墙模型：
  - 基于材料的模型
    - 分层壳单元
  - 基于截面的模型
    - 墙单元
  - 基于构件的模型
    - 等效梁模型，等效桁架模型

等效梁模型

- 将剪力墙等效为框架梁
- 特点
  - 建模最简单
  - 对于宽度小、开洞大、整体弯曲效果明显的墙比较适合
  - 需要考虑节点区刚域等问题

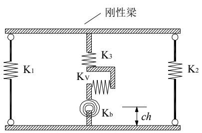
等效桁架模型

- 用对角支撑来模拟对角开裂问题
- 支撑刚度确定困难



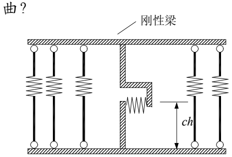
三垂直杆元模型

- 三个竖向弹簧
- 一个剪切弹簧
- 一个弯曲弹簧
- 弯曲中心的确定



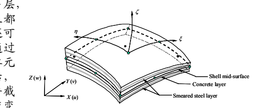
多垂直杆元模型

- 多个垂直杆元来模拟轴向荷载以及弯曲的作用
- 剪切弹簧模拟切向变形
- 问题：平面外弯曲？

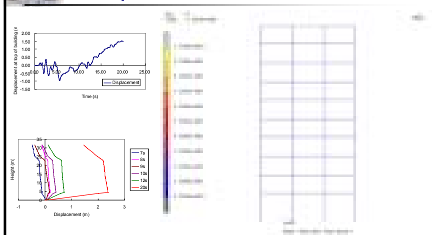


分层壳单元

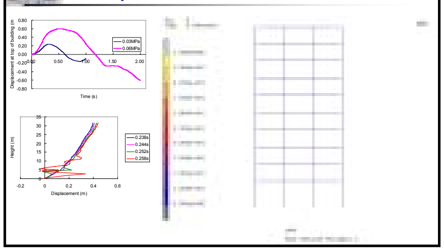
- 即将一个壳单元划分成很多层，将剪力墙中的钢筋和混凝土都分布到各层中去，必要时还可以考虑预应力等的作用。通过有限元计算，可以得到壳单元中心层的应变和曲率，然后，认为壳单元各层材料满足平截面假定，就可以由中心层应变和曲率得到各钢筋和混凝土层的应变，进而由材料本构方程可以得到相应的应力，积分得到整个壳单元的内力。



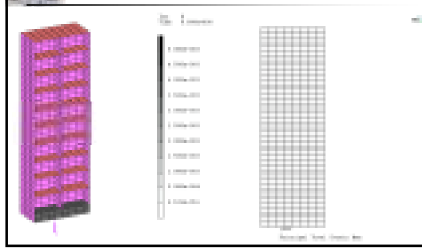
Collapse Due to Seismic



Collapse Due to Blast

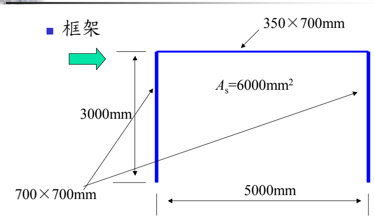


Shear Wall

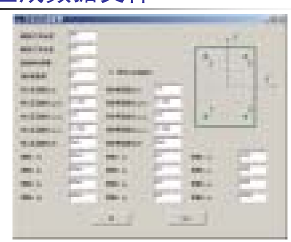


THUFIBER程序算例

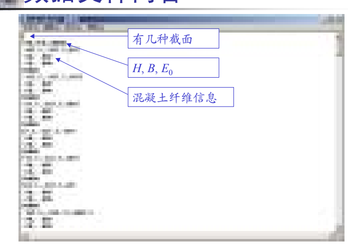
- 框架



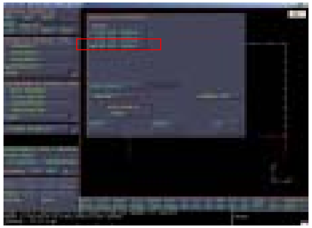
生成数据文件



数据文件内容



指定材料



清华大学研究生课程——《钢筋混凝土有限元》

运行

- THUFIBER –j jobname
  - 例如 THUFIBER –j frame_job1