

# 钢板筒仓侧壁压力的非线性有限元分析

张炎圣 杨晓蒙 陆新征

清华大学土木工程系, 北京, 100084

**摘要:** 钢板筒仓已有超过 70 年的使用历史。Janssen 公式的提出, 使钢板筒仓的设计有了理论基础, 但难以适应各种复杂的筒仓结构和形状。本文基于大型有限元软件 MSC.MARC, 通过借助 MARC 提供的用户自定义材料功能, 开发了关联流动和非关联流动弹塑性本构模型, 利用 MARC 自带的接触功能, 对筒仓侧壁的应力进行了分析, 并将结果与 Janssen 公式进行了对比。分析结果表明, 非线性有限元计算可以准确获得筒仓侧壁的压力分布且具有较好的灵活性。

**关键词:** Janssen 公式 弹性理论 关联流动塑性 非关联流动塑性

## Nonlinear Finite Element Analysis for the Wall Pressure in a Steel Silo

Zhang Yan-sheng Yang Xiao-meng Lu Xin-zheng

Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing, 100084

**Abstract:** It has been 70 years since people started using steel silos for the storage of grain. The proposal of Janssen's Formula makes a theoretical foundation for the study of steel silos, but it is difficult to adapt the formula to complex silo structures and shapes. This paper is based on finite element software MSC.MARC. By using user-defined material function provided by MARC, associated and non-associated flow of elastic-plasticity constitutive models are developed. Wall stress of the silo is analyzed by the contact function in MARC, and the results are compared with Janssen's Formula. The results show that the non-linear finite element calculation can be accurate to the silo wall pressure distribution and of better flexibility.

**Key words:** Janssen's Formula, elastic theory, associated plastic flow, non-associated plastic flow

### 1 研究背景

筒仓物料是一种比较复杂的散粒体材料, 最准确的模拟应当采用非连续数值方法(如离散单元法等)逐粒模拟物料在筒仓内部的堆积、流动行为<sup>[1,2]</sup>。显然, 这类分析对于小型实验室研究而言是可行的, 而对于大型实际工程结构而言, 目前的计算机能力还难以充分满足其需求。因此, 在分析物料和筒仓间的静荷载压力时, 多采用连续体力学的方法加以近似模拟, 其精度基本可以满足一般工程需要。在过去计算机尚不发达的时期, 以 Janssen 公式<sup>[3,4]</sup>为代表的近似解析解被工程界广泛采用。但是, 由于 Janssen 公式的简化程度较大, 逐渐不能满足工程的精确性和安全性的要求, 而伴随着现代计算机技术的发展, 考虑接触计算的非线性有限元分析开始逐渐得到工程界的重视。由于非线性有限元计算核心依然基于连续体力学和弹塑性力学, 其可靠性已经得到理论上的严密证明, 因而比起新兴的非连续数值方法而言, 其稳定性和参数依赖性要表现得好多。而且非线性有限元计算可以适应各种不同的复

杂筒仓内部空间环境, 比解析法更为灵活, 且计算量目前的微机也已经完全可以处理, 所以是最为实用化的筒仓侧壁压力分析方法。

已有文献<sup>[5,6]</sup>中已经利用非线性有限元方法对筒仓侧壁压力进行了讨论。但是, 对内部物料材料模型的选择还不是很严格。线弹性材料模型虽然计算简便, 但是在筒仓折角等形状突变位置, 容易出现不真实的应力集中现象, 进而影响分析结果的可信度。由于筒仓内部物料一般处于比较干燥的状态, 其粘聚应力较低, 因此比较容易进入塑性阶段。如果采用常用的关联流动塑性模型<sup>[7]</sup>, 虽然简便易行, 但往往会过高估计内部物料进入塑性后的体积膨胀效应, 也可能会影响侧壁压力计算结果的准确程度。非关联流动塑性模型一般认为是比较合适的用于描述摩擦型材料的本构模型<sup>[8]</sup>。但是由于其实现方法比较复杂, 并不是所有有限元程序中都提供。因此, 本文结合图 1 所示筒仓, 分别采用不同材料模型和非线性接触分析方法, 对其侧壁压力进行了分析。其结论对类似工程的计算分析有一定的参考作用。

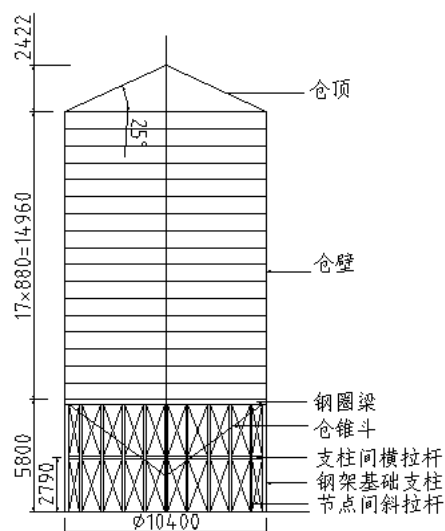


图 1 某钢板筒仓

## 2 Janssen 公式

目前, 世界各国设计筒仓多以 Janssen 公式计算侧壁应力。Janssen 公式建立在以下两条假设的基础上: 1) 任一横截面的竖向压应力均匀分布; 2) 侧向压应力与竖向压应力成正比, 且侧压系数不随高度变化。Janssen 公式包括正压应力和摩擦应力, 如式 (1) 和 (2) 所示。

$$p = \frac{\rho g R}{2\mu} \left( 1 - e^{-\frac{2\mu k_0 y}{R}} \right) \quad (1)$$

$$f = \mu p = \frac{\rho g R}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2\mu k_0 y}{R}} \right) \quad (2)$$

$p$  —— 正压应力

$f$  —— 摩擦应力

$\rho$  —— 玉米密度

$g$  —— 重力加速度

$R$  —— 筒仓半径

$k_0$  —— 玉米侧压系数

$\mu$ ——玉米-仓壁摩擦系数

$y$ ——筒仓深度方向坐标

对于玉米, Janssen 公式用到的材料参数如表 1 所示。

表 1 Janssen 公式材料参数

玉米密度 $\rho$ ( $kg/m^3$ )	玉米侧压系数 $k_0$	玉米-仓壁摩擦系数 $\mu$
750	0.38	0.32

### 3 有限元模型

由于牵涉到接触、摩擦等复杂计算问题, 对计算的软硬件平台提出了很高的要求。特别是采用非关联流动塑性本构关系后, 其单元刚度矩阵不再为对称矩阵, 更是大大增加了计算开支。因此, 本课题利用清华大学土木工程系购买的大型非线性有限元软件 MSC.MARC 2005r2, 在清华大学土木工程系数字防灾与虚拟工程实验室曙光并行工作站上进行相关计算。

本文的分析涉及玉米对筒仓侧壁的接触应力(包括正压应力和摩擦应力), 有限元模型将筒仓简化为刚性曲面(图 2)。同时, 将内部满装的玉米简化为连续体, 并划分成六面体单元(图 3)。整个模型包括 21143 个节点, 20772 个单元。

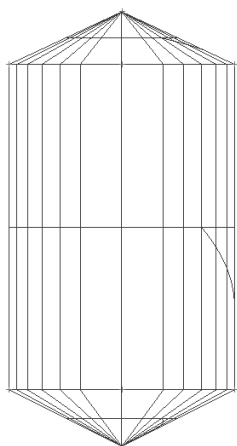


图 2 筒仓有限元简化模型

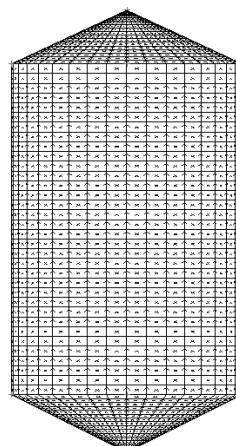


图 3 玉米有限元模型

有限元模型中, 采用不同的材料本构关系, 得到的侧壁应力是有差异的。下面先介绍弹性、流动塑性(包括关联流动塑性、非关联流动塑性)的材料本构关系矩阵, 接着介绍本次分析 MARC 中输入的参数以及使用的子程序。

#### 3.1 弹性本构关系矩阵

该模型不考虑玉米的塑性发展, 设定玉米的弹性模量不变, 则可以得到材料本构关系矩阵  $[D]$  如公式(3)所示。

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & & & & & \\ \nu & 1-\nu & & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$E$ ——弹性模量

$\nu$ ——泊松比

### 3.2 弹塑性本构关系矩阵

该模型考虑材料的塑性发展, 根据弹塑性力学, 得到材料本构关系矩阵 $[D]_{ep}$  如公式(4)所示。

$$[D]_{ep} = \begin{bmatrix} [D] \left[ \frac{\partial g}{\partial [\sigma]} \right] \left[ \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \right]^T [D] \\ [D] - \frac{[D] \left[ \frac{\partial g}{\partial [\sigma]} \right] \left[ \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \right]^T [D]}{A + \left[ \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \right]^T [D] \left[ \frac{\partial g}{\partial [\sigma]} \right]} \end{bmatrix} \quad (4)$$

公式(4)式中 $A$ 的表达式如下

$$A = -\frac{\partial F}{\partial H} [\sigma]^T \left[ \frac{\partial g}{\partial [\sigma]} \right] \quad (5)$$

$g$ ——塑性面函数

$F$ ——屈服面函数

$[\sigma]$ ——应力向量

$H$ ——反映屈服后强化的参数,  $\frac{\partial F}{\partial H}$  可由材料硬化实验确定

关于流动模型, 分成两种情况, 一种是关联流动模型, 即屈服面与塑性势面重合, 亦即 $F=g$ ; 另外一种, 则是非关联流动塑性模型, 即 $F$ 与 $g$ 不相等。

### 3.3 计算参数和子程序

本次分析, 弹性本构采取直接在 MARC 中输入参数, 见表 2。关联流动塑性和非关联流动塑性本构, 则编写用户子程序, 实现材料刚度矩阵在加载过程中的非线性变化。

子程序中, 玉米的屈服采用莫尔屈服准则, 根据 MARC 手册建议的公式, 屈服应力的计算公式如(6)式所示。

$$\sigma_y = \frac{9c \cos \theta}{\sqrt{9 + 3 \sin^2 \theta}} \quad (6)$$

$\sigma_y$ ——屈服强度

$c$ ——玉米粘滞强度, 取 1kPa

$\theta$ ——玉米内摩擦角，取  $27^\circ$

子程序中，采用理想弹塑性本构模型，不考虑材料屈服后的硬化。关联流动塑性的塑性面和屈服面相同，非关联流动塑性采用 Von Mises 流动准则，其流动准则的参数  $\alpha=0$ 。

本次研究采用 MSC.MARC 提供的库仑接触摩擦模型(Coulomb Friction Model)模拟筒仓和内部物料之间的相互作用关系。理想的库仑摩擦模型计算公式可以表示为：

$$F_t \leq \mu F_N \quad (7)$$

$F_t$ ——摩擦力

$F_N$ ——法向压力

$\mu$ ——摩擦系数。

从式(7)不难看出，对于理想的库仑摩擦，其摩擦力和相对滑移之间的关系是一个不光滑的间断曲线。这样的间断曲线对于非线性有限元分析而言是十分不利的，因此目前常用的非线性分析方法大多基于牛顿法，希望目标函数近可能的光滑连续以便得到一个收敛的结果。因此，在 MSC.MARC 有限元程序中，用一个反正弦函数来逼近公式(7)：

$$F_t = \mu F_N \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{V_r}{C}\right) \quad (8)$$

$V_r$ ——接触面的相对速度

$C$ ——预先输入的参考速度，如果  $C$  越小，则公式(8)就越接近公式(7)，而非线性分析时收敛的难度也就相对要大一些。

MARC 及其子程序中输入的参数见表 2。

表 2 材料本构模型参数

密度 $\rho$ ( $kg/m^3$ )	弹性模量 $E$ (初始弹性 模量 $E_0$ ) (MPa)	泊松比 $\nu$	玉米-仓壁 摩擦系数 $\mu$	摩擦参数 $C$	初始屈 服应力 $\sigma_y$ (kPa)	非关联 流动准 则参数 $\alpha$
750	300	0.2	0.32	$10^{-5}$	2.59	0

#### 4 计算结果及分析

图 4~7 给出了关联流动塑性和非关联流动塑性模型得到的侧壁正压应力和摩擦应力的云图，图 8，9 以及表 3，表 4 对各个计算模型的结果进行了比较。可见，仓壁正压应力和摩擦应力的值都随深度的增大而增大。采用弹性材料模型计算的结果与严森公式比较接近，且小与严森公式的计算结果。而采用流动塑性材料模型计算的结果与严森公式相差较远，且比严森公式的结算结果大。其中，非关联流动塑性模型计算的结果最大，与严森公式相差最远。所以，如果材料是弹性的，则用严森公式进行设计偏于安全；如果材料是弹塑性的，则用严森公式进行设计偏于危险。

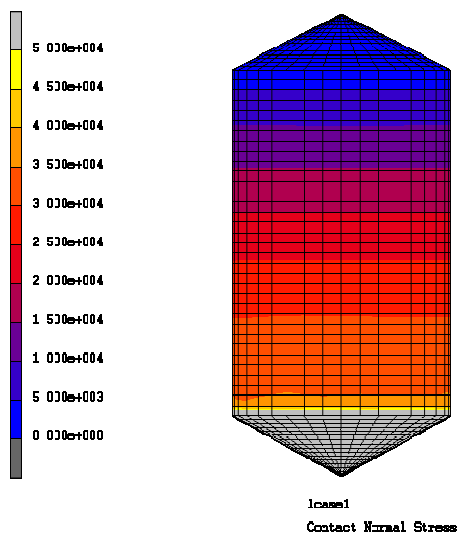


图4 关联流动塑性正压应力图

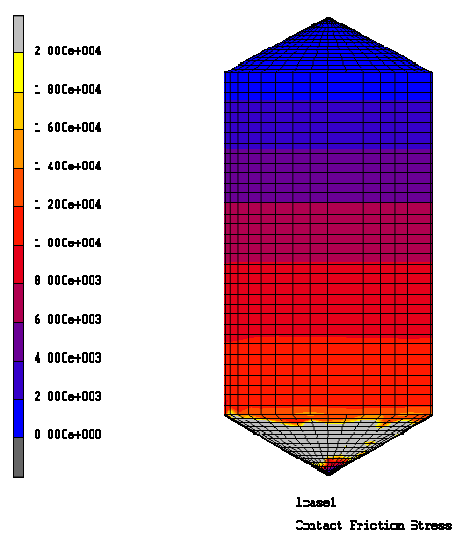


图5 关联流动塑性摩擦应力云图

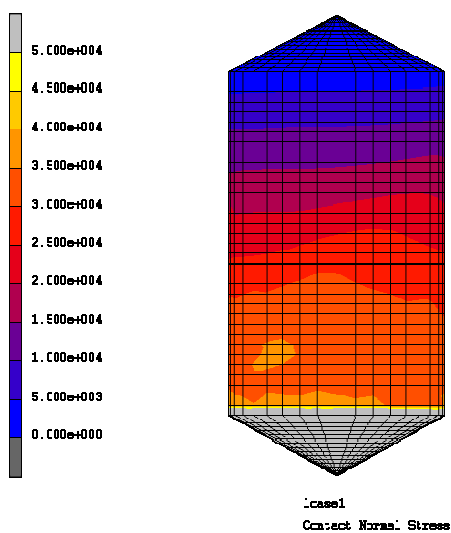


图6 非关联流动塑性正压应力云图

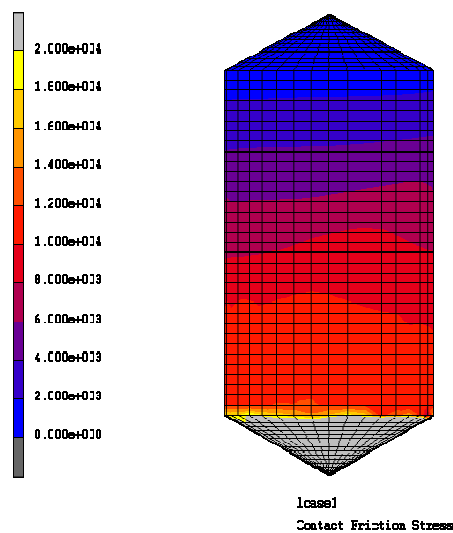


图7 非关联流动塑性摩擦应力云图

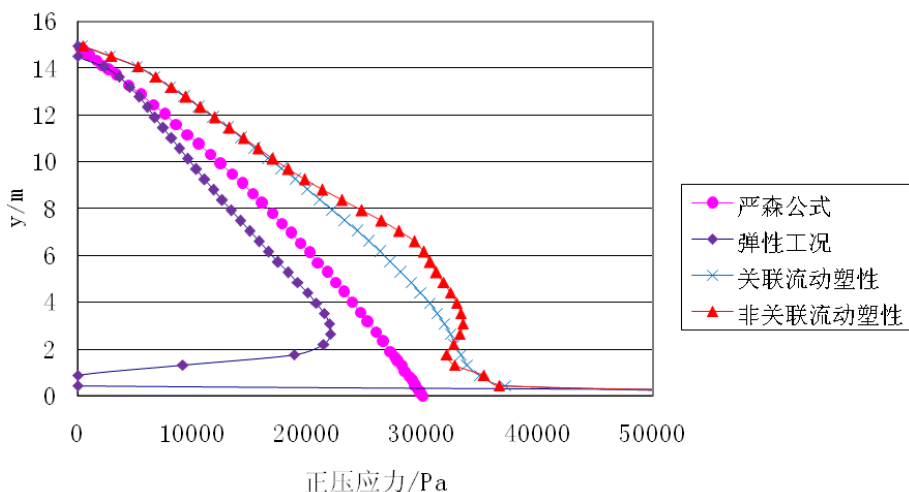


图 8 正压应力分布曲线

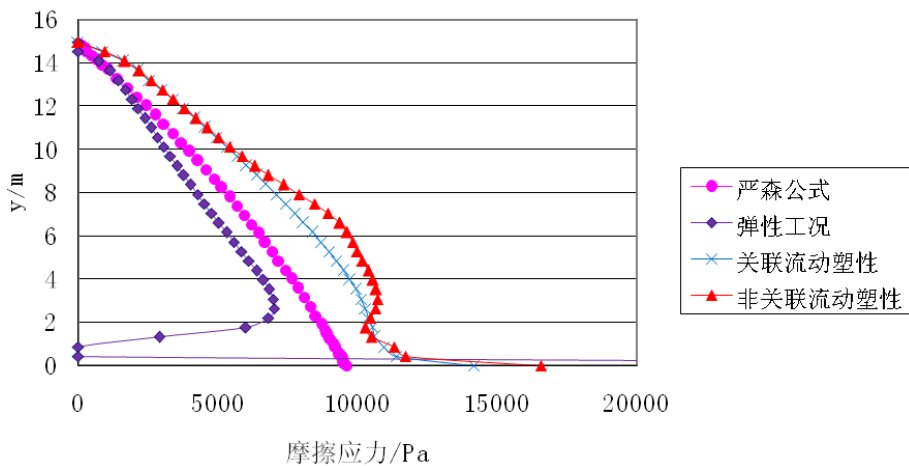


图 9 摩擦应力分布曲线

表 3 正压应力计算结果比较

深度	Janssen 公式	弹性模型		关联流动塑性模型		非关联流动塑性模型	
	$\sigma_0$ (Pa)	$\sigma$ (Pa)	$\sigma/\sigma_0$	$\sigma$ (Pa)	$\sigma/\sigma_0$	$\sigma$ (Pa)	$\sigma/\sigma_0$
0	0	0		405.4		450.7	
$h/10$	3323.2	3595.39	1.08	6670.6	2.00	6811.3	2.04
$2h/10$	6561.0	6736.76	1.02	11836.9	1.80	11914.1	1.81
$3h/10$	11550.0	8853.96	0.76	15454.0	1.33	15677.7	1.35
$4h/10$	14315.0	11797.70	0.82	20036.4	1.39	21266.5	1.48
$5h/10$	17757.0	14143.40	0.79	23279.7	1.31	26425.4	1.48
$6h/10$	20166.0	16600.10	0.82	26300.6	1.30	30085.0	1.49
$7h/10$	23165.0	19981.60	0.86	29839.7	1.28	32434.3	1.40
$8h/10$	25263.0	21910.10	0.86	31898.2	1.26	33509.8	1.32
$9h/10$	27875.0	9164.910	0.32	33892.3	1.21	32760.6	1.17
$h$	29998.0	180823.00	6.02	71548.6	2.38	81544.8	2.71

表4 摩擦应力计算结果比较

深度	Janssen 公式	弹性模型		关联流动 塑性模型		非关联 流动塑性模型	
	$\tau_0$ (Pa)	$\tau$ (Pa)	$\tau/\tau_0$	$\tau$ (Pa)	$\tau/\tau_0$	$\tau$ (Pa)	$\tau/\tau_0$
0	0	0		0		0	
$h/10$	1063.4	1148.98	1.08	2128.89	2.00	2177.02	2.04
$2h/10$	2431.5	2152.79	0.88	3777.12	1.55	3807.65	1.56
$3h/10$	3695.9	2829.21	0.76	4930.32	1.33	5010.38	1.35
$4h/10$	4580.8	3769.37	0.82	6389.67	1.39	6797.20	1.48
$5h/10$	5682.3	4518.06	0.79	7420.55	1.30	8449.41	1.48
$6h/10$	6453.2	5301.40	0.825	8378.00	1.29	9623.03	1.49
$7h/10$	7412.7	6376.80	0.86	9492.09	1.28	10374.6	1.39
$8h/10$	8084.3	6984.45	0.86	10128.20	1.25	10718.2	1.32
$9h/10$	8920.1	2909.67	0.32	10621.00	1.19	10477.6	1.17
$h$	9599.3	56861.1	5.92	14149.50	1.47	16564.9	1.72

## 5 结语

本文使用 MSC.MARC 软件, 对物料作用下筒仓的侧壁应力进行了分析。分析时分别采用了弹性理论、关联流动塑性以及非关联流动塑性理论, 并将得出的结果与 Janssen 公式进行了对比, 得到如下结论:

(1) MSC.MARC 软件能够较好地分析物料作用下筒仓侧壁的接触应力情况, 尤其是 MSC.MARC 强大的非线性计算能力, 以及允许用户进行二次开发, 为得到真实的应力分布提供有力保证。

(2) 弹性材料模型计算的结果与 Janssen 公式比较接近, 且小于 Janssen 公式计算的结果; 但是采用流动塑性材料模型, 计算的结果比 Janssen 公式大, 所以对于具有塑性的物料, 用 Janssen 公式进行仓壁设计可能偏于不安全。

## 6 致谢

本文感谢十一五国家科技支撑计划课题(2006BAK01A02-09)对本研究的资助, 感谢清华大学土木工程系数字防灾与虚拟工程实验室提供高性能计算环境。

## 参考文献

- [1] 肖昭然, 王军, 何迎春, 筒仓侧压力的离散元数值模拟[J], 河南工业大学学报, 2006,27(2):10~12.
- [2] 俞良群, 刑纪波, 筒仓装卸料时力场及流场的离散单元法模拟[J], 农业工程学报, 2006,16(4):15~19.
- [3] 张家康, 黄文萃, 筒仓贮料压力计算理论与方法[J], 土木工程学报, 2006, 33(5):24~28.
- [4] 苏乐道, 立筒仓内粮食静压力的应力分布[J], 郑州粮食学院学报, 1997, 18(30):70~74
- [5] 陆新征, 陈勇, 某特大型筒仓侧壁压力有限元分析[J], 山西建筑, 2006, 32(2): 1-2.



- [6] 王丽艳, 袁新明, 贮料对钢仓壁面静动压力特性的弹塑性分析[J], 四川建筑科学研究, 2006, 32(3): 23-25.
- [7] 江见鲸, 何放龙, 何益斌, 陆新征编著, 有限元法及其应用[M], 机械工业出版社, 2006.
- [8] 陈惠发, 土木工程材料的本构方程[M], 华中科技大学出版社, 2001.