

文章编号: 1000-4750(2011)02-0018-06

# 基于多点位移控制的推覆分析算法

黄羽立<sup>1</sup>, 陆新征<sup>2</sup>, \*叶列平<sup>2</sup>, 施 炜<sup>2</sup>

(1. 加州大学伯克利分校土木与环境系, 加州, 94720, 美国;

2. 清华大学土木工程系, 清华大学结构工程与振动教育部重点实验室, 北京 100084)

**摘 要:** 该文提出了静力推覆分析的一种新的数值方法, 通过引入位移刚性约束来保持恒定推覆侧力分布, 实现基于位移控制的推覆分析。首先基于虚功原理对引入位移刚性约束实现保持恒定推覆侧力分布进行了论证, 在理论上证明了该方法既适用于弹性结构, 也适用于弹塑性结构。随后, 以通用有限元程序 MSC.MARC 为例, 介绍了如何实现基于多点位移控制的推覆分析。最后, 通过算例对比, 说明该文建议方法在计算结构复杂非线性特别是软化过程中的突出优势, 即能够获取结构从弹性阶段到完全失去水平承载力的全过程, 为全面认识结构的静力推覆性能, 特别是为结构的倒塌分析, 提供了有力工具。

**关键词:** 静力推覆分析; 多点位移约束; 位移控制; 虚功原理; 倒塌分析

中图分类号: TU311.4 文献标识码: A

## A PUSHOVER ANALYSIS ALGORITHM BASED ON MULTIPLE POINT CONSTRAINTS

HUANG Yu-li<sup>1</sup>, LU Xin-zheng<sup>2</sup>, \*YE Lie-ping<sup>2</sup>, SHI Wei<sup>2</sup>

(1. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, CA 94720, US;

2. Department of Civil Engineering, Key Laboratory of Structural Engineering and Vibration of China Education Ministry, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** This paper proposes a new numerical method for pushover analysis. By using multiple point constraints, the lateral force distribution is maintained and displacement-controlled pushover analysis is achieved. The method is derived from the principle of virtual work and the rigidity of multiple point constraint. It is applicable to both elastic and inelastic structures. The proposed pushover analysis method can be implemented with user-defined subroutine interfaces of finite element software MSC.MARC. The outstanding performance of the method is then demonstrated using monotonic and cyclic pushover analysis of reinforced concrete structures. The evolution of deterioration from onset to eventual member and structural failure can be tracked, suggesting that the proposed method is a powerful tool offering complete pictures and considerable insight into pushover performance and collapse mechanism of structures.

**Key words:** pushover analysis; multiple point constraint; displacement control; principle of virtual work; collapse analysis

收稿日期: 2009-05-25; 修改日期: 2009-06-29

基金项目: 国家自然科学基金重大研究计划基金重点项目(90815025); 国家科技支撑计划项目(2006BAJ03A02); 国家科技支撑计划项目(2009BAJ28B01)

作者简介: 黄羽立(1980—), 男, 广东广州人, 博士, 主要从事结构工程研究(E-mail: yulee@berkeley.edu);

陆新征(1978—), 男, 安徽芜湖人, 副教授, 博士, 副所长, 主要从事结构非线性仿真研究(E-mail: luxz@tsinghua.edu.cn);

\*叶列平(1960—), 男, 江苏扬州人, 教授, 博士, 主要从事混凝土结构、地震工程研究(E-mail: ylp@tsinghua.edu.cn);

施 炜(1986—), 男, 上海人, 博士生, 从事结构抗震研究(E-mail: shi-w05@mails.tsinghua.edu.cn).

作为实现结构基于性能抗震设计和评估的重要工具,静力推覆分析(Pushover Analysis<sup>[1]</sup>)是一种计算比较简单而又能反映整体结构抗震性能和抗震能力的方法<sup>[2-3]</sup>。静力推覆分析以能够反映结构地震作用的侧力模式逐渐施加水平地震作用,获得整体结构的抗震能力,可以对结构中的关键单元或重要构件的变形作近似估计,并可发现一些不利于整体结构抗震的因素(如承载力或刚度突变等),找到结构可能的变形集中位置、构件塑性铰的发展次序,以及整体结构能否实现预期的破坏机制等。

为了得到整体结构的完整性能曲线,往往需要将结构推覆到下降段(软化段),而当前静力推覆分析遇到的最大的数值困难是:当结构进入软化阶段,需要等比例的降低荷载。如果下降段是整体结构的软化,例如结构的整体屈曲,采用弧长法(Arc-Length Method<sup>[4-5]</sup>)进行求解就能够快速有效的得到计算结果<sup>[6]</sup>。但如果下降段是由于结构的局部失效引起的,例如混凝土的开裂、压碎,或者钢筋拉断,那么平衡路径就可能会有“跳跃”或者“突变”,不再光滑连续变化。此时弧长法在求解上就会遇到很大困难。而与控制荷载相比,控制位移可以提高求解的稳定性<sup>[7]</sup>。但是在静力推覆分析中,由于结构中不同部位非线性程度的差异,使满足荷载比例关系所对应的多点位移并不能在分析前预先知道,所以不能简单的采用位移控制的方式进行加载。这给静力推覆方法在结构强非线性阶段和结构倒塌问题中的研究带来了很大困难。针对该问题,本文采用了一种基于多点位移控制的推覆分析方法,该方法在原有结构模型中引入一个能够使荷载分布保持恒定比例关系的位移约束<sup>[8]</sup>,通过位移控制的方式进行恒定推覆侧力分布的推覆分析,从而大幅度提高了分析的数值稳定性。本文首先介绍多点位移控制推覆分析方法的理论,而后以通用有限元程序 MSC.MARC 为例,介绍该方法的具体实现,并通过典型算例的推覆分析结果,以及与弧长法分析结果的对比,说明本文提出的多点位移控制推覆分析方法的优势。

## 1 分析理论

如果一个结构上一共有  $N$  个自由度需要施加比例为  $(p_1 : p_2 : \dots : p_N)$  的荷载,则对该结构增加以下位移约束方程。通过约束这  $N$  个自由度位移,使对应的荷载  $(F_1 : F_2 : \dots : F_N)$  满足比例关系  $(p_1 :$

$$p_2 : \dots : p_N)^{[8]}:$$

$$\sum (p_i d_i) - \left( \sum p_i \right) d_0 = 0 \quad (1)$$

其中:  $p_i$  是第  $i$  个自由度上施加荷载的比例系数;  $d_i$  是第  $i$  个自由度的位移;  $d_0$  是新增约束方程引入自由度的位移,可以看作加载自由度位移的加权平均值,即由式(1)变换得:

$$d_0 = \frac{\sum (p_i d_i)}{\sum p_i} \quad (2)$$

式中,各自由度的位移  $d_i$  对应的权重为该自由度的荷载比例系数  $p_i$ 。

现证明如下:对这  $N$  个自由度位移  $d_1, d_2, \dots, d_N$  及新引入自由度位移  $d_0$  分别引入虚位移  $\delta d_i$  及  $\delta d_0$ ,则由虚功原理可得:

$$F_0 \delta d_0 + \sum (-F_i \delta d_i) = 0 \quad (3)$$

其中:  $F_i$  是约束施加在原有结构上的荷载;  $(-F_i)$  和  $F_0$  分别是  $d_i$  和  $d_0$  上约束所受的外力。因为约束是刚性的,所以式(3)右端内力所做的虚功为零。虚位移  $\delta d_i$  和  $\delta d_0$  应该满足约束方程式(1),因此有:

$$\sum (p_i \delta d_i) - \left( \sum p_i \right) \delta d_0 = 0 \quad (4)$$

由式(3)和式(4)消去  $\delta d_0$  可得:

$$\sum \left\{ \left[ p_i F_0 - \left( \sum p_i \right) F_i \right] \delta d_i \right\} = 0 \quad (5)$$

注意到  $d_i$  是加载自由度位移,要使式(5)对任意大小的虚位移  $\delta d_i$  恒成立,则  $\delta d_i$  对应的系数必须全部为零,即:

$$p_i F_0 - \left( \sum p_i \right) F_i = 0 \quad \forall i \quad (6)$$

如果  $\sum p_i \neq 0$ ,则可以进一步推出约束作用  $F_i$  的比例关系如下:

$$F_1 : \dots : F_N = p_1 : \dots : p_N \quad (7)$$

所以,如果位移约束方程式(1)成立,则荷载  $(F_1 : \dots : F_N)$  就始终满足  $(p_1 : \dots : p_N)$  的比例,也即保持恒定的荷载分布。

以上分析表明,只要在原有结构上增加位移约束方程式(1),就能保证推覆分析中保持恒定侧力分布。特别有用的是,  $d_0$  自由度上不但能直接施加荷载,也能通过控制位移的方式进行加载,从而有效的提高了加载的灵活性和数值稳定性。以上分析的理论前提是虚功原理和刚性位移约束,这两个前提与原结构的特性无关,所以本方法对弹性和弹塑性结构均适用。(本文附录通过一个简单线弹性算例和一个简单弹塑性算例介绍了该方法的具体计算步骤,以便于读者理解。)

## 2 在有限元程序中的实现

下面以通用有限元程序 MSC.MARC 为例介绍本文建议方法的具体实现,其他有限元程序可以根据方程式(1)或式(2)定义位移约束。MSC.MARC 程序提供了一系列用户二次开发子程序功能,其中通过编写用户子程序 UFORMS 定义约束矩阵[S],可以将某一节点(称为被约束节点)的任意一个自由度的位移,与其他若干个节点(称为约束节点)的任意位移建立线性组合关系,即<sup>[9]</sup>:

$$\{u^C\} = [S]\{u^R\} \quad (8)$$

式中:  $\{u^C\} = \{u_1^C, \dots, u_M^C\}^T$ ;  $\{u^R\} = \{u_1^{R1}, \dots, u_M^{R1}, \dots, u_1^{RN}, \dots, u_M^{RN}\}^T$ ;  $u_j^C$  为被约束节点的第  $j$  个自由度的位移;  $u_j^{Ri}$  为第  $i$  个约束节点第  $j$  个自由度的位移,每个节点共有  $M$  个自由度,约束矩阵[S]为节点位移之间的关系,共  $M$  行  $M \times N$  列。如果每个节点只有一个自由度,则式(1)或式(2)对应于以下[S]约束矩阵:

$$u_1^C = \frac{\sum (p_i u_1^{Ri})}{\sum p_i} \Leftrightarrow [S] = \frac{1}{\sum p_i} [p_1, \dots, p_N] \quad (9)$$

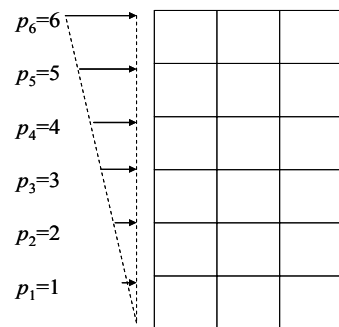
在 UFORMS 子程序中,只需给矩阵[S]中相应元素赋值为各个推覆分析加载节点的归一化荷载比例  $p_i / (\sum p_i)$ ,即可在 MSC.MARC 中实现式(1)的约束关系。有关 UFORMS 子程序的详细编写方法,参考文献[10]做了详细介绍。然后在计算分析中对被约束节点  $\{u^C\}$  施加适当的位移荷载,就能实现基于位移控制的推覆分析,直至整体结构完全破坏,从而获得整体结构从开始加载到完全破坏的全过程,为研究整体结构在各个受力阶段的性能,特别是倒塌阶段的性能提供依据。

## 3 钢筋混凝土平面框架的推覆分析

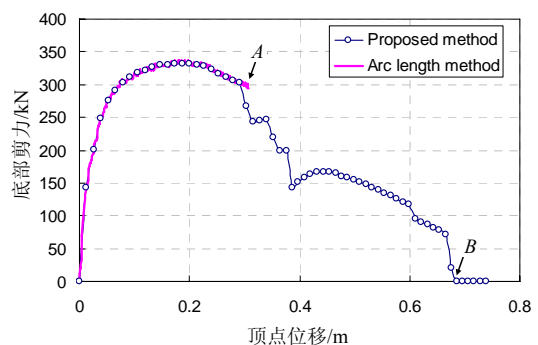
根据分析理论和分析程序的实现方法,结合清华大学开发的基于 MSC.MARC 的 THUFIBER 程序<sup>[11-12]</sup>,对两个钢筋混凝土平面框架进行了位移控制的推覆分析。THUFIBER 采用纤维梁单元模型,并开发了混凝土和钢筋非线性特征的本构模型,可以比较全面的模拟钢筋混凝土杆系构件的单向及滞回受力行为,相关理论背景和验证算例参见文献[11-12]。

图 1(a)为一按我国规范 7 度设防的 6 层 3 跨钢筋混凝土框架,横向柱距 4m,纵向柱距 6m,层高

3.6m,场地类别为 II 类,设计地震分组为第二组,建筑类别为丙类。按照 PKPM 的 SATWE 模块给出的结果和三级框架构造措施进行配筋,梁截面  $300\text{mm} \times 550\text{mm}$ ,柱截面  $550\text{mm} \times 550\text{mm}$ ,梁、柱的混凝土强度等级均为 C30,梁、柱的纵向受力钢筋均为 HRB335 级,箍筋为 HPB235 级。楼面、屋面恒载均取为  $7\text{kN/m}^2$ (含楼板自重),活载为  $2\text{kN/m}^2$ 。取中间一榀横向框架建模进行推覆分析,采用倒三角形荷载模式。分别利用 MSC.MARC 程序提供的弧长法和本文建议的多点位移控制法进行推覆计算,得到推覆曲线如图 1(b)所示,可见采用本文建议方法的推覆计算,可以稳定的追踪结构的整个软化过程(误差限制为不平衡力  $< 0.1\%$ )。当结构推覆到图 1(b)的 A 点时,中柱混凝土开始压碎,结构侧向承载力急剧下降。此时弧长法已经不能收敛,计算中止。而此时结构的倒塌过程才刚刚开始,竖向倒塌模式不明显,故而难以基于弧长法结果来分析研究结构的倒塌机理。而本文建议的基于多点位移控制推覆分析方法,可以完整追踪结构的整个破坏过程,结构最终为中柱柱脚在水平推覆侧力和  $P-\Delta$  效应下的压弯破坏,见图 1(c),此时对应于图 1(b)推覆曲线上的 B 点,可见本文方法可以清晰反应结构的倒塌过程和机理。图 1(d)给出了本文推覆分析得到的各层推覆力-顶点位移关系,可见它们严格符合预设的侧向荷载模式比例。



(a) 推覆荷载比例



(b) 推覆结果

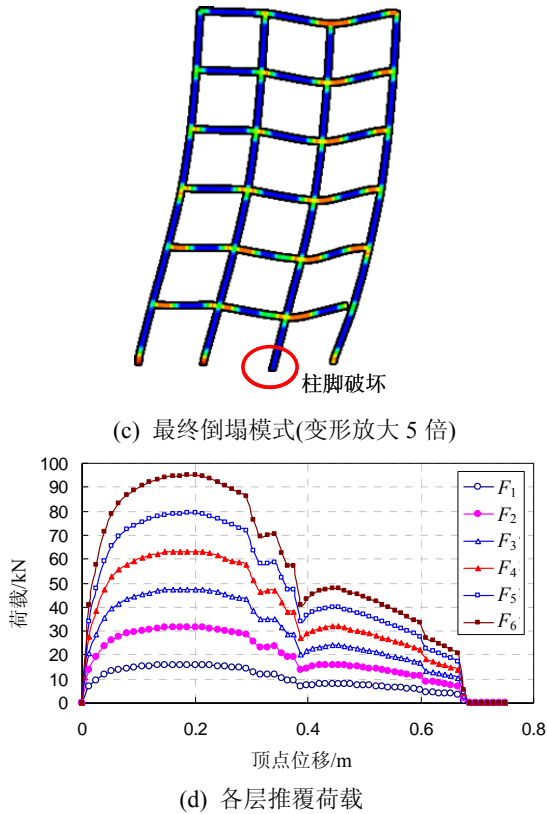


图1 倒三角荷载单向推覆

Fig.1 Monotonic pushover (inverted triangle distribution)

近年来, 随着多模态推覆方法(Modal Pushover Analysis<sup>[13]</sup>)日益受到重视<sup>[14]</sup>, 结构高阶模态推覆问题也日益受到关注。与一阶推覆分析相比, 高阶推覆的数值计算难度更大。特别是如果想通过结构在进入严重破坏阶段的往复推覆曲线评价结构的滞回耗能能力, 则目前的非线性计算方法大多无法满足要求。图 2 所示为前文所示框架按照二阶振型(图 2(a))进行反复推覆分析, 得到的滞回曲线如图 2(b)所示, 图 2(b)中横坐标为结构顶点位移, 纵坐标模态力为所有楼层推覆力之和。从图 2(b)中可以看出, 本文建议方法计算过程稳定(收敛标准设为不平衡力 1%的误差), 计算结果良好。这里需要指出的是: 当推覆位移超过荷载峰值点 A 以后, 无论是加载(位移增加, 结构软化侧向抗力降低), 还是卸载(位移减小, 结构卸载侧向抗力降低), 结构的侧向推覆荷载都要减小。这时传统的基于力的推覆方法根本无法按照预设条件控制加载或卸载, 也就无法进行进入软化段后结构的往复推覆分析。

此外, 本文方法也可用于自适应推覆分析(Adaptive Pushover Analysis<sup>[15]</sup>), 即在每个增量推覆分析步内, 根据相应的推覆侧力分布模式应用本文方法。

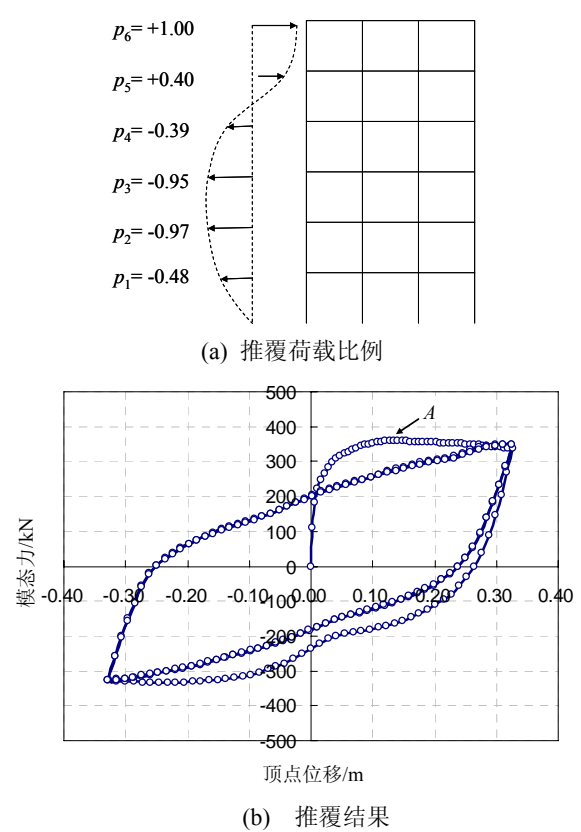


图2 二阶模态荷载往复推覆

Fig.2 Cyclic pushover analysis (second-mode distribution)

## 4 结论

本文提出了在原结构中引入刚性位移约束方程保持恒定推覆侧力分布, 实现位移控制的推覆分析, 并运用虚功原理阐述了利用位移约束保持恒定推覆侧力分布的理论。以通用有限元程序 MSC.MARC 为例, 介绍了如何实现基于多点位移控制的推覆分析。最后通过实际算例, 说明本文建议方法在计算结构复杂非线性特别是软化过程中的突出优势, 能够获取结构从弹性阶段到完全失去水平承载力全过程的平衡路径, 为全面认识结构在水平侧力作用下各个阶段的力学性能, 特别是为结构的倒塌分析, 提供了有力工具。

### 参考文献:

- [1] Building Seismic Safety Council. NEHRP guidelines for the seismic rehabilitation of buildings [R]. Washington DC: Federal Emergency Management Agency, 1997.
- [2] 缪志伟, 马千里, 叶列平, 陆新征. Pushover 方法的准确性和适用性讨论[J]. 工程抗震与加固改造, 2008, 30(1): 55-59.  
Miao Zhiwei, Ma Qianli, Ye Lieping, Lu Xinzheng. Study on the accuracy and applicability of the Pushover

- analysis [J]. Earthquake Resistant Engineering and Retrofitting, 2008, 30(1): 55–59. (in Chinese)
- [3] 缪志伟, 叶列平, 陆新征. 框架-剪力墙结构的静力弹塑性分析研究[J]. 工程抗震与加固改造, 2008, 30(6): 41–48.  
Miao Zhiwei, Ye Lieping, Lu Xinzheng. Nonlinear static analysis for frame-shear-wall structures [J]. Earthquake Resistant Engineering and Retrofitting, 2008, 30(6): 41–48. (in Chinese)
- [4] Crisfield M A. A Fast incremental/iteration solution procedure that handles ‘snap-through’ [J]. Computers and Structures, 1981, 13: 55–62.
- [5] Ramm E. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. Nonlinear finite element analysis in structural mechanics [C]// Wunderlich E, Stein E, Bathe K J. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [6] 江见鲸, 何放龙, 何益斌, 陆新征. 有限元法及其应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006.  
Jiang Jianjing, He Fanglong, He Yibin, Lu Xinzheng. Finite element method and application [M]. Beijing: Chinese Machine Press, 2006. (in Chinese)
- [7] 江见鲸, 陆新征, 叶列平. 混凝土结构有限元分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.  
Jiang Jianjing, Lu Xinzheng, Ye Lieping. Finite element analysis of concrete structures [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005. (in Chinese)
- [8] Huang Y. Simulating the inelastic seismic behavior of steel braced frames including the effects of low-cycle fatigue [D]. Berkeley: University of California at Berkeley, 2009.
- [9] MSC Software Corporation, Marc Volume D. User subroutines and special routines (Version 2005) [M]. Santa Ana, CA: 2-45–2-49.
- [10] 陆新征, 林旭川, 叶列平. 多尺度有限元建模方法及其应用[J]. 华中科技大学学报(城市科学版), 2008, 25(4): 76–80.  
Lu Xinzheng, Lin Xuchuan, Ye Lieping. Multiscale finite element modeling and its application in structural analysis [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Urban Science Edition), 2008, 25(4): 76–80. (in Chinese)
- [11] 叶列平, 陆新征, 马千里, 汪训流, 缪志伟. 混凝土结构抗震非线性分析模型、方法及算例[J]. 工程力学, 2006, 23(增刊 II): 131–140.  
Ye Lieping, Lu Xinzheng, Ma Qianli, Wang Xunliu, Miao Zhiwei. Seismic nonlinear analytical models, methods and examples for concrete structures [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(Sup.II): 131–140. (in Chinese)
- [12] 汪训流, 陆新征, 叶列平. 往复荷载下钢筋混凝土柱受力性能的数值模拟[J]. 工程力学, 2007, 24(12): 76–81.  
Wang Xunliu, Lu Xinzheng, Ye Lieping. Numerical simulation for the hysteresis behavior of RC columns under cyclic loads [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(12): 76–81. (in Chinese)
- [13] Anil K Chopra, Rakesh K Goel. A modal pushover analysis procedure for estimating seismic demands for buildings [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2002, 31: 561–582.
- [14] 马千里, 叶列平, 陆新征. MPA 法与 Pushover 法的准确性对比[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2008, 36(11): 121–128.  
Ma Qianli, Ye Lieping, Lu Xinzheng. Comparative evaluation of pushover analysis and modal pushover analysis with invariant spatial earthquake load [J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition), 2008, 36(11): 121–128. (in Chinese)
- [15] Bracci J M, Kunnath S K, Reinhorn A M. Seismic performance and retrofit evaluation for reinforced concrete structures [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1997, 123(1): 3–10.

## 附录：计算步骤简单算例

### 算例 1

首先用一个简单的弹性结构使本文第二节的证明过程形象化。该结构由两个刚度分别为 1 和 2 的独立弹簧组成(如图 A1 所示), 为了评价该结构的性能, 对其施加比例为 2 : 1 的荷载  $\{F_1, F_2\}^T = \{4, 2\}^T$ , 通过计算可得位移为  $d_1=4$  和  $d_2=1$ 。

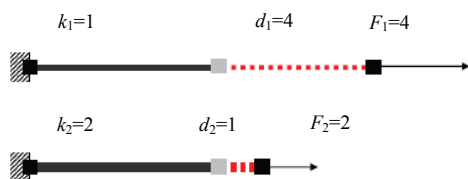


图 A1 线弹性结构  
Fig.A1 Elastic structure

作为比较, 下面应用本文提出的引入刚性位移约束法求解同一结构。为了保持荷载比例为 2 : 1, 基于式(1), 对原结构增加位移约束方程:

$$2d_1 + 1d_2 - 3d_0 = 0 \quad (\text{A1})$$

与式(1)类似,  $d_0$  是由约束引入的附加位移。对位移约束引入虚位移, 由虚功原理可得:

$$F_0 \delta d_0 - F_1 \delta d_1 - F_2 \delta d_2 = 0 \quad (\text{A2})$$

上式中的虚位移  $\delta d_1$ 、 $\delta d_2$  和  $\delta d_0$  也应满足式(A1)的约束, 即:

$$2\delta d_1 + 1\delta d_2 - 3\delta d_0 = 0 \quad (\text{A3})$$

由式(A2)和式(A3)消去  $d_0$  可得:

$$(2F_0 - 3F_1) \delta d_1 + (F_0 - 3F_2) \delta d_2 = 0 \quad (\text{A4})$$

注意到  $d_1$ 、 $d_2$  是加载自由度的位移, 要使式(A4)对任意虚位移  $\delta d_1$ 、 $\delta d_2$  恒成立, 则  $\delta d_1$ 、 $\delta d_2$  对应的系数必须全部为零, 即:

$$2F_0 - 3F_1 = F_0 - 3F_2 = 0$$

也就是  $F_1 : F_2 = 2 : 1$ 。

所以通过引入本文建议的刚性约束方程,可以保证荷载  $F$  始终按比例施加。在位移控制加载计算过程中,通过逐步增大  $d_0$ ,直至当  $d_0=3$  时,内力  $R$  与外力  $F$  平衡,此时  $\{R_1, R_2\}^T = \{F_1, F_2\}^T = \{4, 2\}^T, \{d_1, d_2\}^T = \{4, 1\}^T$ , 结果正确。

**算例 2**

下面再通过一个理想弹塑性结构介绍本文方法的计算步骤。结构仍由两个弹性刚度分别为  $K_{e1}=1$  和  $K_{e2}=2$  的独立弹簧组成,屈服荷载均为  $F_{y1}=F_{y2}=2$ ,屈服变形分别为  $d_{y1}=2$  和  $d_{y2}=1$ ,屈服后刚度为  $K_p=0$ ,即理想弹塑性弹簧(如图 A2 所示)。

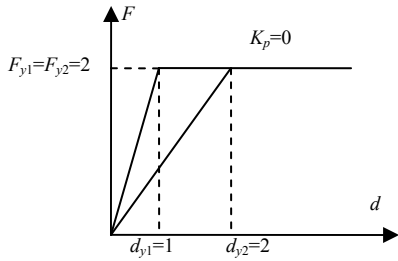


图 A2 理想弹塑性弹簧模型力-位移关系

Fig.A2 Load-displacement relation of ideal elastic-plastic spring model

求解在加权平均位移  $d_0=3$  时,结构的内力和变形分布。结构的力平衡方程为:

$$\{R\} - \{F\} = \{0\}, \{R\} = \begin{Bmatrix} R_1(d_1) \\ R_2(d_2) \end{Bmatrix}, \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (A5)$$

将位移约束方程式(A1)用矩阵形式表达:

$$\{g\}(\{d\}) = [Q]\{d\} - \{d_g\} = \{0\} \quad (A6)$$

其中,  $[Q]=\{2,1\}$ ,  $\{d\}=\{d_1, d_2\}^T$ ,  $\{d_g\}=3d_0$ 。不妨用拉格朗日乘子求解带约束式(A6)的原结构方程组  $\{R\} - \{F\} = \{0\}$ , 那么新的结构方程组变化为:

$$\begin{cases} \{R\} + [Q]^T \{\lambda\} - \{F\} = \{0\} \\ [Q]\{d\} - \{d_g\} = \{0\} \end{cases} \quad (A7)$$

对于本算例,需要求解关于  $\{d_1, d_2, \lambda\}^T$  的非线性方程组:

$$\begin{cases} R_1(d_1) + 2\lambda \\ R_2(d_2) + 1\lambda \\ 2d_1 + 1d_2 - 3d_0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (A8)$$

式(A8)中反力  $R_1$  和  $R_2$  分别是位移  $d_1$  和  $d_2$  的非线性函数,可用牛顿法迭代求解该非线性方程组:

$$\begin{Bmatrix} d_1^{(i+1)} \\ d_2^{(i+1)} \\ \lambda^{(i+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1^{(i)} \\ d_2^{(i)} \\ \lambda^{(i)} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{r1}(d_1^{(i)}) & 0 & 2 \\ 0 & K_{r2}(d_2^{(i)}) & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} R_1(d_1^{(i)}) + 2\lambda^{(i)} \\ R_2(d_2^{(i)}) + 1\lambda^{(i)} \\ 2d_1^{(i)} + 1d_2^{(i)} - 3d_0 \end{Bmatrix} \quad (A9)$$

式中:上标( $i$ )为迭代次数;  $K_{r1}$  和  $K_{r2}$  分别为两弹簧的切线刚度。以弹性解开始迭代,可得:

$$\begin{Bmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \\ \lambda^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} R_1(d_1^{(0)}) = 2, K_{r1}(d_1^{(0)}) = K_p = 0 \\ R_2(d_2^{(0)}) = 2, K_{r2}(d_2^{(0)}) = K_{e2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \\ \lambda^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 2-4 \\ 2-2 \\ 8+1-9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.25 \\ 0.5 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$R_1(d_1^{(1)}) = 2, R_2(d_2^{(1)}) = 1. \quad (A10)$$

最后的解为  $\{R_1, R_2\}^T = \{F_1, F_2\}^T = \{2, 1\}^T$ ,  $\{d_1, d_2\}^T = \{4.25, 0.5\}^T$ ,  $d_0 = (2d_1 + d_2)/3$ , 结果正确。