

应用无网格伽辽金方法分析结构大变形问题

陆新征 杨宁 江见鲸

(清华大学土木工程系 北京 100084)

【摘要】无单元法由于不需要复杂的网格划分,不存在网格畸变问题,因此在大变形分析领域有着广阔的应用前景。本文利用无网格伽辽金(EFGM)方法,对二维结构大变形问题进行了分析,得到了传统有限元方法所难以得到的结果。文中详细讨论了无网格伽辽金方法的基函数、权函数的选取及影响域的设定,并给出了各参数的具体取值。用计算实例说明了无网格伽辽金方法在解决结构大变形问题上的优势。

【关键词】无网格伽辽金方法;大变形;无单元法

Analysis of Large Deformation Problem with Mesh Free Galerkin

Method

LU Xinzheng YANG Nin JIANG Jianjing

(Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract Meshless method has obviously advantage in large deformation area, because there is no mesh needed, and no mesh distortion happens. Large deformation for plane problems are analyzed in this paper with mesh free galerkin method (EFGM). In order to improve the speed and the stability of computation, the three basic problems for moving least square method (MLS) in EFGM, which are the base function, the weight function and the influence area, are discussed in details, respectively. The values of each parameter used in this analysis are also listed. The examples show that the EFGM can solve some special problems that are difficult for the finite element method.

Keywords Mesh free galerkin method; large deformation; meshless method

1 引言

无网格伽辽金方法(EFGM)是近年来兴起的一种新型数值计算方法,其基本思路是利用移动最小二乘法,根据积分点附近一定影响范围(称作影响域)内的节点的位移,用最小二乘插值得到积分点附近的近似位移场函数。它突破了传统有限元分析中单元网格的限制,极大地简化了前后处理工作。并且,因为不使用单元网格,在结构发生大变形的情况下,也不会出现网格畸变的问题,因此,近年来得到广泛的重视和迅速发展。

在无网格伽辽金方法中,移动最小二乘法(MLS)是影响计算结果的一个关键问题,在实际计算过程中,移动最小二乘法有三个关键性的参数需要事先确定:第一个是基函数

的选取, 第二个是权函数的选取, 第三个是影响半径的设定。

2 移动最小二乘法的基本原理

某场 Ω 的函数 $u^*(x)$, 可由移动最小二乘法构造其近似函数

$$u^*(x) \approx u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) \equiv \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x) \quad (1)$$

这里 $\mathbf{a}(x)$ 是系数, 它是 x 的函数; $\mathbf{p}(x)$ 是 m 维完全多项式基, 在二维情况下可取

$$\mathbf{p}^T(x) = [1 \quad x \quad y] \quad (m=3) \quad \text{线性基} \quad (2a)$$

$$\mathbf{p}^T(x) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2] \quad (m=6) \quad \text{二次基} \quad (2b)$$

$$\mathbf{p}^T(x) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3] \quad (m=10) \quad \text{三次基} \quad (2c)$$

式 (1) 在点 x^* 附近对应的局部近似为

$$u^h(x, x^*) = \sum_{j=1}^m p_j(x^*) a_j(x) \equiv \mathbf{p}^T(x^*) \mathbf{a}(x) \quad (3)$$

系数 $\mathbf{a}(x)$ 根据加权最小二乘来确定, 它使得近似函数 $u^h(x, x^*)$ 和原函数 $u^*(x)$ 在各已知点 x_j 上取值差别的加权平方范数 J 最小。

$$J = \sum_{j=1}^n w(\|x - x_j\|) [u^h(x, x_j) - u^*(x_j)]^2 = \sum_{j=1}^n w(\|x - x_j\|) \left[\sum_{i=1}^m p_i(x_j) a_i(x) - u^*(x_j) \right]^2 \quad (4)$$

这里 $w(\|x - x_j\|)$ 是权函数, $u^*(x_j)$ 是 $u^*(x)$ 在 x_j 处的值。

要求 J 对系数 $\mathbf{a}(x)$ 取极小, 即 $\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0$, 进而得到系数 $\mathbf{a}(x)$

$$\mathbf{a}(x) = A^{-1}(x) B(x) \mathbf{u}^* \quad (5)$$

这里

$$A(x) = \sum_{i=1}^n w_i \left(\|x - x_j\| \right) p(x_i) p^T(x_i) \quad (5a)$$

$$B(x) = [w_1 \left(\|x - x_j\| \right) p(x_1), \dots, w_n \left(\|x - x_j\| \right) p(x_n)] \quad (5b)$$

$$\mathbf{u}^* = [u^*(x_1), u^*(x_2), \dots, u^*(x_n)]^T \quad (5c)$$

因此, 式(1)可改写为

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n n_i(x) u_i^* \quad (6)$$

这里 $n_i(x)$ 即为 i 节点的形函数在 x 点的值

$$n_i(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) [A^{-1}(x) B(x)]_{ji} \quad (6a)$$

形函数关于坐标的偏导数为

$$n_{i,k}(x) = \sum_{j=1}^m \{ p_{j,k}(x) [A^{-1}(x) B(x)]_{ji} + p_j(x) [A_{,k}^{-1}(x) B(x) + A^{-1}(x) B_{,k}(x)]_{ji} \} \quad (7)$$

$$A_{,k}^{-1}(x) = -A^{-1} A_{,k} A^{-1} \quad (8)$$

3 基函数的选择

最小二乘法基函数的选择, 多采用幂函数形式, 其次数一般在一次到三次之间。文献[6]指出, 提高基函数的次数, 可以有效提高对应力场的近似程度, 尤其是对于复杂的应力场。但是, 提高基函数次数也带来很多问题。包括有:

- 1、计算量明显增大。比如, 对于平面问题, 如果采用线性基, 每个积分点需要对一个 3×3 的矩阵 A 求逆, 当采用二次基的时候, 则要计算 6×6 的矩阵, 三次基的时候更是达到了 10×10 , 这样使得计算效率严重降低。
- 2、由于最小二乘法得到的矩阵 A 一般都有一定的病态, 其条件数常常偏大。而且, 如果节点分布不当, 矩阵条件数还会迅速增大, 而且基函数次数越高, 问题也越严重。例如: 一个简单平面块体, 采用不等间距随机节点分布, 当节点分布严重不均匀的时候, 若使用二次基, 矩阵条件数可以达到 10^{16} 数量级, 这是严重的病态矩阵, 使得求解完全失败。而如果采用线性基, 条件数可以控制在 10^4 之内, 保证了数值计算的精度。

考虑到以上问题, 在本次分析中, 基函数均选用线性基, 并通过增加节点密度的方法来提高计算精度。事实说明, 利用线性基, 由于减小了计算量, 避免了病态矩阵的出现, 所

以其最后精度并不比高次基低，在出现大变形而使节点分布严重不均匀时效果尤其明显。

4 权函数的选择

权函数是另一个重要的问题，很多研究者提出了很多权函数的表达形式，基本上可以归结为幂函数、指数函数或对数函数等几个大类别。权函数的选取应该遵循的原则包括：1) 非负；2) 由近及远逐渐衰减，在影响域以外为零；3) 连续可导

这里计算选择了寇晓东提出的权函数形式[9]

$$w_i(r_i) = \frac{r_{mi}^2}{r_i^2 + \varepsilon^2 r_{mi}^2} \left[1 - \frac{r_i^2}{r_{mi}^2} \right]^k \tag{9}$$

其中 ε 决定着权函数的奇异性，权函数奇异性越大，则对节点附近位移场的描述越精确，相反的，对远场的描述却越差。同样对图 1 所示的简单平面问题，用不同参数分析，最后结果如表 1 所示

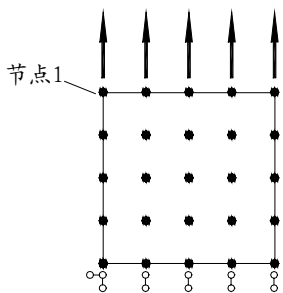


表 1、计算结果对比 (节点 1 横向位移, $k=4$)

	$\varepsilon=0.01$	$\varepsilon=0.05$	$\varepsilon=0.1$
精确解	-4.0×10^{-2}	-4.0×10^{-2}	-4.0×10^{-2}
$r_m=1$	-4.04×10^{-2}	-4.07×10^{-2}	-4.03×10^{-2}
$r_m=2$	-4.14×10^{-2}	-4.68×10^{-2}	-4.86×10^{-2}
$r_m=3$	-4.47×10^{-2}	-5.66×10^{-2}	-6.57×10^{-2}

图 1、平面算例 1

从对比可以看出， ε 和 r_m 的取值都对结果的精度有比较大的影响。这里我们需要注意到：虽然减小 ε 未必可以提高计算精度，但是，较小的 ε 可以有效降低 r_m 取值变化给结果带来的波动，鉴于 r_m 对结果精度影响较大，且 r_m 确定目前还没有一个公认的方法，因此，在本次计算中， ε 取较小的值，即 0.01。

5 影响域

影响域是影响最小二乘精度和计算量的另一个重要参数，在移动最小二乘法的收敛性证明中，当节点的密度趋向于无穷大的时候，影响半径应该趋向于零。也就是说，影响半径是和节点密度密切相关的。而且，其选取对结果影响非常明显，尤其是对应力的影响。

以图 2 的一维例子为例:

图中黑点所示为待拟合曲线, 用两条不同的曲线拟合节点 1 附近的位移场, 拟合曲线 1 的影响半径是 3, 曲线 2 是 6。可以看出, 两者之间差距明显, 且曲线导数 (应力场) 的差距更是明显。说明影响半径对结果会有很大影响。可是, 目前对影响半径的选取还没有统一的说法。

从理论上说, 影响域应该至少包括 $m+1$ 个节点, 这里 m 是基函数的项数, 以保证最小二乘计算可以进行下去。但是, 也不宜过大, 否则将增大计算量且影响精度。因此, 在本次计算中, 采用了以下方法确定影响域的大小。

- 1、确定某个积分点, 搜索距该积分点最近的 6 个 (针对线性基) 节点
- 2、以这 6 个节点中最远的那个作为影响半径 r
- 3、 $r_m = 1.2r$

之所以每个积分点选择 6 个节点, 是考虑到某些节点可能延一条直线分布, 可能导致最小二乘计算失败。令 $r_m = 1.2r$, 则是考虑到因为 ε 比较小, 最边缘的节点的权重可能会太小, 影响计算的稳定性。实践证明, 利用这种方法不但可以保证计算的精度和稳定性, 而且可以自动适应大变形带来的节点密度的变化。

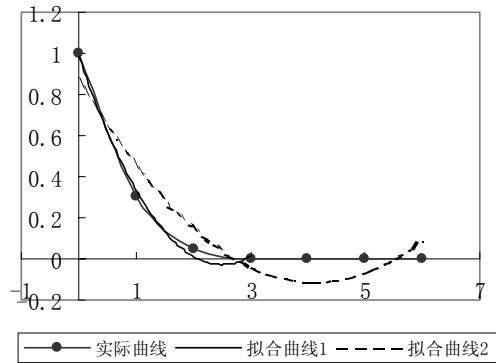


图 2、不同曲线拟合对比

6 积分点和边界条件的处理

本次计算中, 积分是在背景网格上进行的, 当某个积分点在区域以外, 则不参与积分。对于大变形问题, 由于节点位移都比较大, 各积分点和区域之间的关系是不断变化的, 因此, 在每次迭代的时候都需要判断一下积分点是否在区域内。即便这样, 其工作量也比重新划分网格的代价要小很多。

边界条件采用罚函数方法处理, 其优点是刚度矩阵保持对称正定, 方程求解简便, 效率高。

7 计算结果

参照以上方法, 用 Fortran90 编写了计算程序, 分析了平面正方形弹性块体在拉伸、压缩作用下的大变形问题及悬臂梁大变形问题, 得到计算结果如图 3.1、3.2、3.3 所示。

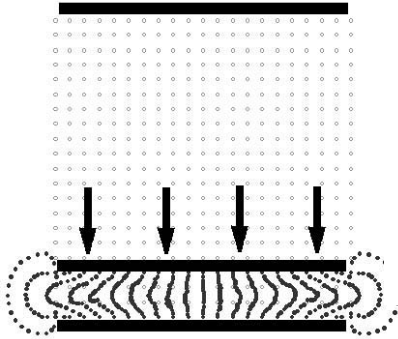


图 3.1 块体压缩变形 (压缩率 87.5%)

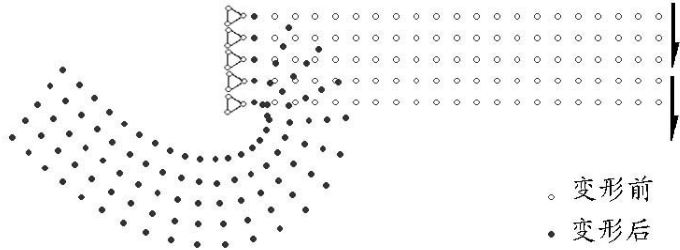


图 3.2 悬臂梁弯曲变形

一般有限元计算压缩变形只能达到 65%左右,之后则会因为网格畸变而无法继续计算,而无网格法不需要对原节点划分做任何改动就可以达到 87.5%的压缩率。

8 结论

无网格伽辽金方法由于摆脱了传统有限元方法单元的束缚,在侵彻分析,塑性成型等大变形计算领域有着其独特的优势。尽管目前无网格伽辽金方法的计算效率还不及传统的有限元方法,但是,随着计算机技术的发展和有限元-无单元法耦合计算的成熟,将来必有更大的应用前景。

参 考 文 献

- [1] Belytschko T, Meshless method: An overview and recent development [J]. Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg, 139: 3~47, 1996
- [2] Belytschko T, Lu Y Y, Element Free Galerkin method [J]. Int. J. Numer. Methods. Engrg, 37: 229~256, 1994
- [3] Liu WK, Multi-scale meshfree particle method [C]. EMPESC VIII, 2001: 61-71
- [4] 李卧东, 无网格法理论研究及其在工程中的应用[D], 武汉: 华中理工大学博士学位论文, 2000
- [5] 周维垣, 寇晓东, 无单元法及其工程应用, 力学学报, 30 (2): 193-202, 1998
- [6] 寇晓东, 无单元法追踪结构开裂及拱坝稳定分析, 北京: 清华大学博士学位论文, 1998

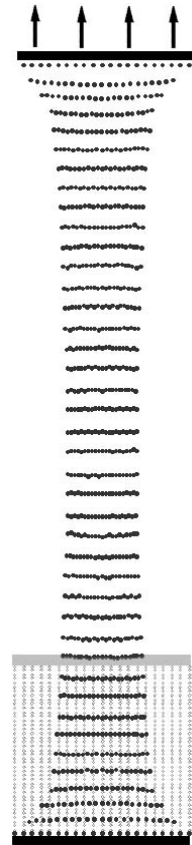


图 3.3 块体拉伸变形 (拉伸率 425%)