

文章编号 : 1000-4750(2004)02-0024-05

利用无网格方法分析钢筋混凝土梁开裂问题

陆新征, 江见鲸

(清华大学土木工程系, 北京 100084)

摘 要: 裂缝处理一直是混凝土数值分析中的一个难点, 而无网格方法由于不需要单元网格, 非常适用于分析断裂问题, 因此可以考虑将其引入混凝土断裂分析领域。首先将混凝土中的裂缝分为微观裂缝和宏观裂缝, 对于微观裂缝仍然使用传统的弥散裂缝模型; 而宏观裂缝则利用无网格方法可以非常方便地调整节点分布的特点, 通过增加裂缝节点和裂面边界的方法加以模拟。并给出了宏观裂缝产生, 扩展的具体模拟方法。通过算例表明, 利用提出的方法, 可以较准确地分析混凝土宏观裂缝的产生、扩展以及裂缝宽度变化, 得到一些传统有限元方法难以得到的计算结果。

关键词: 断裂力学; 混凝土裂缝; 无网格; 弥散裂缝; 宏观裂缝

中图分类号: O346.1 文献标识码: A

ANALYSIS OF CRACKING OF RC BEAMS USING MESHLESS METHOD

LU Xin-zheng, JIANG Jian-jing

(Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Simulation of cracking in concrete is difficult using traditional numerical method. The meshless method has been widely used in fracture analysis. In this paper, cracks in concrete are divided into micro-cracks and macro-cracks. Different crack models are applied to each kind of cracks, respectively. The micro-cracks are represented by the smeared crack model. The macro cracks are represented by additional nodes and edges, with the convenience of adjusting node distribution in meshless method. The details on the simulation of macro-cracks' appearance and propagations are introduced. A numerical example shows that the present method can obtain the propagation of macro-cracks in concrete, together with the width of the cracks. Behavior which are intractable for the traditional finite element method, is observed.

Key words: fracture mechanics; concrete crack; meshless; smeared crack; macro-crack

1 引言

混凝土最重要的特征之一是它的抗拉强度很低, 在很多情况下混凝土结构是带裂缝工作的。裂缝引起应力和位移的突变, 一直是混凝土非线性分析的重要因素^[1]。对裂缝的处理 0000 适当与否是能

否正确地分析混凝土结构的关键问题, 同时, 也是较难处理的复杂问题。目前在传统的有限元方法中的处理裂缝的方式常用的有 3 种^[1]。第一种方法是把裂缝处理成单元边界, 并随裂缝发展调整网格分布, 这种方法思想很简单, 而且和真实情况符合较

收稿日期: 2002-10-09; 修改日期: 2002-12-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59938180)

作者简介: 陆新征(1978), 男, 安徽芜湖人, 博士生, 从事结构非线性分析研究;

江见鲸(1938), 男, 江苏武进人, 教授, 博士生导师, 主要从事结构非线性, 防灾减灾研究

好,但是需要增加新的节点和单元,存在过程繁琐,计算效率低的问题。第二种也是最广泛使用的方法是使用弥散裂缝的方法,具有简单,易于程序实现的优点。但这种方法的缺点是难以得到单条裂缝的宽度、扩展方向等信息;第三种方法是利用断裂力学的方法,构造含裂缝单元。这种方法精度高,但是需要根据裂缝的发展修改单元类型,不断在裂缝尖端安放含裂缝单元,因此同样存在繁琐、效率低的问题;然而,目前发展迅速的无网格方法由于不需要单元网格,可以很方便的修改节点分布,非常适用于断裂分析领域。因此,从传统有限元处理混凝土裂缝的前两种方法出发,通过引入无网格方法,应该可以提高混凝土数值分析的精度和效率。

2 无网格伽辽金方法的基本理论和相关参数

2.1 无网格伽辽金方法的基本理论

这里我们采用无网格方法的是 Belytschko 提出的无网格伽辽金方法(EFGM)^[2,3],其基本思路是:某场 W 的函数 $u^*(x)$,可由移动最小二乘法构造其近似函数

$$u^*(x) \approx u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) \equiv \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x) \quad (1)$$

这里 $\mathbf{a}(x)$ 是系数,它是 x 的函数; $\mathbf{p}(x)$ 是 m 维完全多项式基。

系数 $\mathbf{a}(x)$ 根据加权最小二乘来确定,它使得近似函数 $u^h(x, x^*)$ 和原函数 $u^*(x)$ 在各已知点 x_j 上取值差别的加权平方范数 J 最小。

$$J = \sum_{j=1}^n w(\|x - x_j\|) [u^h(x, x_j) - u^*(x_j)]^2 \quad (2)$$

$$= \sum_{j=1}^n w(\|x - x_j\|) \left[\sum_{i=1}^m p_i(x_j) a_i(x) - u^*(x_j) \right]^2$$

这里 $w(\|x - x_j\|)$ 是权函数, $u^*(x_j)$ 是 $u^*(x)$ 在 x_j 处的值。

要求 J 对系数 $\mathbf{a}(x)$ 取极小,即 $\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0$, 进而得到系数 $\mathbf{a}(x)$

$$\mathbf{a}(x) = A^{-1}(x) B(x) \mathbf{u}^* \quad (3)$$

这里

$$A(x) = \sum_{i=1}^n w_i(\|x - x_j\|) p(x_i) p^T(x_i) \quad (3a)$$

$$B(x) = [w_1(\|x - x_j\|) p(x_1), \dots, w_n(\|x - x_j\|) p(x_n)] \quad (3b)$$

$$\mathbf{u}^* = [u^*(x_1), u^*(x_2), \dots, u^*(x_n)]^T \quad (3c)$$

因此,式(1)可改写为

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n n_i(x) u_i^* \quad (4)$$

这里 $n_i(x)$ 即为 i 节点的形函数在 x 点的值,进而可以得到结构的刚度矩阵

$$K = \int_w B^T D B dW \quad (5)$$

这里

$$B = \begin{bmatrix} n_{1,x} & 0 & n_{2,x} & 0 & \dots & n_{n,x} & 0 \\ 0 & n_{1,y} & 0 & n_{2,y} & \dots & 0 & n_{n,y} \\ n_{1,y} & n_{1,x} & n_{2,y} & n_{2,x} & \dots & n_{n,y} & n_{n,x} \end{bmatrix} \quad (6)$$

2.2 相应参数选取

考虑到开裂问题的复杂性,本次计算选用的基函数为线性基函数。权函数为寇晓东^[4]提出的权函数形式

$$w_i(r_i) = \frac{r_{mi}^2}{r_i^2 + \mathbf{e}^2 r_{mi}^2} \left[1 - \frac{r_i^2}{r_{mi}^2} \right]^k \quad (7)$$

$\mathbf{e} = 0.05$, $k = 2$ 。 r_m 根据节点和边界关系变化由程序自动设定。边界条件通过 Gavete^[5]建议的罚函数方法施加。

3 影响域的设定和裂缝边界的处理

由于裂缝的开展,节点和高斯积分点之间的关系是不断变化的,因此,本文中采用以下方法处理影响域的范围及节点和高斯积分点之间的关系:

(1) 对于某一高斯积分点 P_{int} ,首先判断各个节点和它的关系。即在节点和该高斯积分点之间连线,如果该连线和某个边界(可以是实体边界,也可以是裂缝)相交,则认为该节点被这条边界“遮蔽”了,不参与该高斯积分点的计算

(2) 对于所有未被“遮蔽”的节点,选取和该高斯积分点距离最近的 6 个节点,参与该高斯积分点的运算

(3) 以参与计算的最远的节点的距离作为该高斯积分点的影响半径。

根据以上步骤得到的影响域形状以及节点和高斯积分点之间的关系如图 1 所示。对每个高斯积分点重复以上步骤,就可以得到无网格伽辽金方法计算所需的各项几何参数。

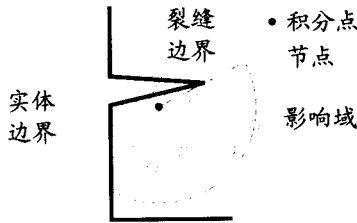


图1 影响域和边界的处理

Fig.1 Setup of the influence domain and its border

4 宏观裂缝的生成和开展

4.1 裂缝的分类

由于混凝土的最大拉应力很低，相应于最大拉应力的拉应变也很小，一般是 10^{-4} 左右。也就是说，在实际混凝土构件中，存在大量的肉眼不可见的微裂缝。对于这些微裂缝，要一一加以模拟是不可能的。而实际工程最为关心的则是那些肉眼可见的宏观裂缝，而这些微裂缝一般不是我们关心的重点。因此，我们使用如下两种方法来区别对待宏观和微观裂缝。

(1) 当混凝土的拉应变小于某一数值时 $e_{t,u}$ ，我们认为这时混凝土的裂缝基本上都是肉眼不可见的微裂缝，此时的混凝土仍然可以承受部分的拉应力。因此，对于这些混凝土，可以使用传统的弥散裂缝模型。其详细公式参见文献[1]。其中，根据文献[6]的试验结果，取混凝土的极限拉应变 $e_{t,u} = 800 \times 10^{-6}$ ；

(2) 当混凝土的拉应变大于 $e_{t,u}$ 时，我们认为此时混凝土中已经存在肉眼可见的宏观裂缝，弥散裂缝模型已经不能很好的描述这些裂缝。因此，我们通过增加节点和边界的方法，对这些裂缝加以几何描述；

4.2 宏观裂缝的生成

本次计算均假设裂缝首先从构件的边缘产生，对于普通钢筋混凝土梁等纯弯或弯剪组合受力构件，该假设一般都是成立的。由于无网格法没有网格划分的限制，因而可以很方便地在可能产生裂缝的任意位置布置节点和边界来生成裂缝。具体的裂缝产生方法如下：

(1) 对于某一确定的荷载步，根据距离边界最近的高斯积分点的拉应变值外推出构件边界上相应位置点 P_{ext} 的拉应变值。由于无网格伽辽金方法中高斯点的密度一般是节点密度的4倍以上，因此，使用高斯点对开裂点位置的判断的精确程度将高

于使用节点拉应变来判断；

(2) 如果某个边界上的外推点 P_{ext} 的最大拉应变大于 $e_{t,u}$ ，则认为该点将出现宏观裂缝；

(3) 在 P_{ext} 两侧延原构件边缘方向增加两个新的节点，各偏移一个很小的量 $D_{e,i}$ ，同时延 P_{ext} 的最大压应力方向在构件内部增加一个新的节点 N'_c ，即裂缝尖端节点。 N'_c 距构件边缘的距离为2倍的高斯点间距 d_{gauss} 。并由这三个节点组成两个新的边界即裂缝边界，如图2所示；

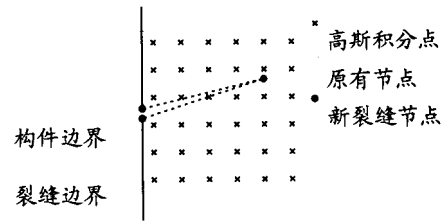


图2 宏观裂缝的生成

Fig.2 Generation of macro-crack

(4) 用第3节中提到的方法重新建立在新的节点和边界分布下的节点和高斯积分点关系，重新计算该荷载步，得到裂缝尖端节点 N'_c 的最大拉应变 $e'_{c,t}$ 。

(5) 如果 $e'_{c,t} > e_{t,u}$ ，即此时的裂缝深度应该比给定的深度要大，需要修正裂缝深度。将 $N_{c,t}$ 继续延现有裂缝方向向前移动1倍的高斯点间距 d_{gauss} 。

(6) 重复步骤(4)，(5)直至 $e'_{c,t} < e_{t,u}$ 。则可以认为在当前荷载步下构件宏观裂缝生成已经完成。

需要说明的是，用这种方法产生的裂缝，其尖端有着较严重的应力集中问题，采用最大拉应变作为裂缝扩展标准，理论上会带来计算结果的不稳定。不过，由于在本方法中已经先使用弥散裂缝模型模拟微观裂缝，从而可以有效减轻裂缝尖端的应力集中，加上实际计算中节点和积分点的密度也是有限的。因此，根据我们的数值试验，在节点平均间距大于10mm时，计算结果基本上是稳定的。

4.3 宏观裂缝的开展

在施加新一级荷载后，得到各个裂缝尖端节点 $N'_{c,i}$ 的拉应变。如果 $N'_{c,i}$ 的主拉应变大于 $e_{t,u}$ ，则在该尖端节点附近再增加一个新的节点 N_1 ， N_1 和 $N'_{c,i}$ 的距离很近。同时沿 $N'_{c,i}$ 的主压应变方向前进 $2d_{gauss}$ 增加一个新的节点 N_2 ，如图3所示。

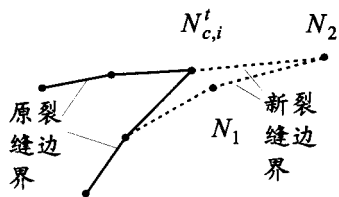


图3 宏观裂缝开展

Fig.3 Expansion of macro-crack

以 N_2 为新的裂缝尖端节点，修正节点和高斯点之间的关系，重新计算该荷载步，如果新裂缝尖端节点 N_2 的拉应变大于 $\epsilon_{t,u}$ ，则 N_2 继续沿原方向前进 d_{gauss} ，直至 N_2 的拉应变小于 $\epsilon_{t,u}$ 。

5 混凝土和钢筋的组合

由于无网格方法节点配置非常灵活，因而可以在任何配置钢筋的位置增加节点。本文使用传统混凝土有限元分析中常采用的链杆单元来模拟钢筋，钢筋与混凝土共用节点，如图4所示。在混凝土无网格伽辽金方法得到的整体刚度矩阵中的相应位置增加钢筋链杆单元刚度矩阵，就可以得到钢筋对整体结构的影响。在宏观裂缝出现以后，也不必改变原钢筋和混凝土之间的节点关系，非常方便。

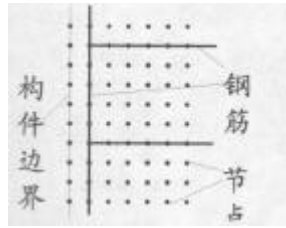


图4 混凝土和钢筋组合

Fig.4 Combination of concrete and rebar

6 算例

利用本文介绍的方法分析了一根素混凝土悬臂梁 B1 和一根无腹筋混凝土悬臂梁 B2。算例的几何尺寸和初始节点分布如图5所示，共布置了 $41 \times 11=451$ 个节点，1600 个高斯积分点。构件尺寸为 $2000 \times 250 \times 500\text{mm}$ ，B2 的混凝土保护层厚度为 25mm，混凝土为 C30，受压应力应变曲线采用《混凝土结构设计规范》GB 50010-2002^[7]推荐公式。钢筋为 HRB335，采用理想弹塑性本构模型。计算得到其荷载位移曲线如图6所示，与规范建议公式计算得到的承载力和刚度误差均小于 10%。各个相应时刻的宏观裂缝发展情况如图7所示。可见使用本文介绍的方法可以清晰准确地模拟混凝土悬臂梁的受力变形和裂缝发展情况。

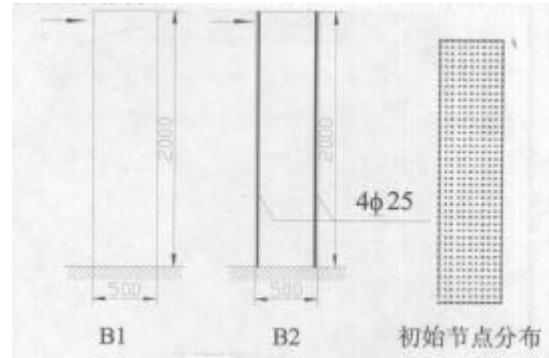


图5 构件几何尺寸及初始节点分布

Fig.5 Dimension and initial node distribution of specimens

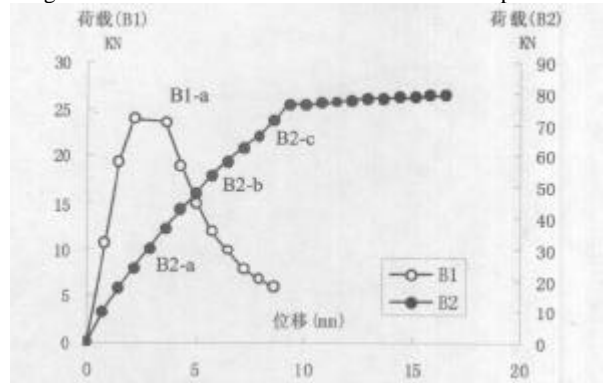


图6 荷载位移曲线

Fig.6 Load-displacement curves

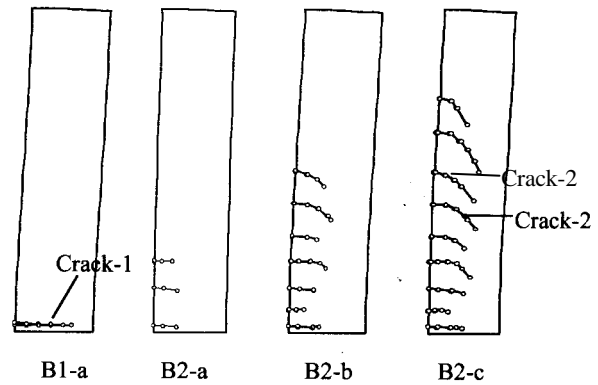


图7 宏观裂缝发展

Fig.7 Expansion of macro-cracks

选取图7中的两条典型宏观裂缝 Crack-1 和 Crack-2 的局部放大图如图8所示，在 Crack-1 中，由于不存在钢筋约束，混凝土的裂缝宽度基本上是线性变化的。而在 Crack-2 中，由于钢筋约束的影响，在钢筋附近，裂缝宽度大大减小。而在构件中部，由于没有箍筋作用，构件的裂缝宽度较大。这都和真实的试验规律符合较好。

7 结论

开裂是混凝土的重要力学特性。由于通常混凝土

土中同时存在大量的微裂缝和宏观裂缝，因而使混凝土的开裂分析变得非常困难。本文首先对混凝土的裂缝进行了分类，再分别利用不同的裂缝模型模拟不同发展阶段的混凝土裂缝。最后利用无网格方法不需要单元网格，可以很方便修改节点和裂缝边界分布的优点，提出了宏观裂缝的产生、发展的模拟方法。算例表明，该方法可以真实再现钢筋混凝土中宏观裂缝的形状及其开展过程，得到以往有限元分析难以得到的结果。

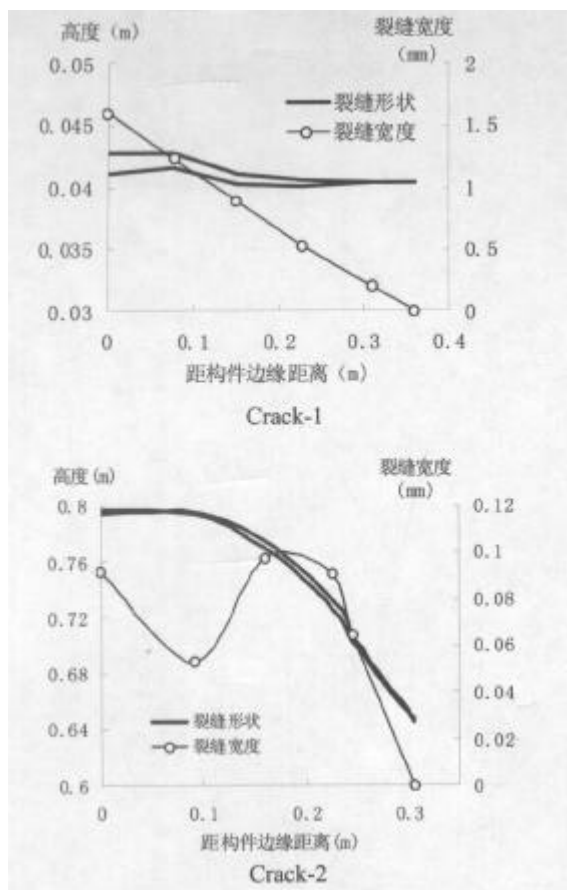


图 8 裂缝形状和宽度

Fig.8 Shape and width of cracks

参考文献：

- [1] 江见鲸. 钢筋混凝土结构非线性有限元分析[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1994. 91-116, 118-132.
Jiang Jianjing. Nonlinear finite element analysis of RC structures [M]. Xi'an: Shanxi Science and Technology Press, 1994. 91-116, 118-132. (in Chinese)
- [2] Belytschko T. Meshless method: An overview and recent development [J]. Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg, 1996, 139: 3-47.
- [3] Belytschko T, Lu Y Y. Element free Galerkin method [J]. Int. J. Numer. Methods. Engrg, 1994, 37:229-256.
- [4] 周维垣, 寇晓东. 无单元法及其工程应用[J]. 力学学报, 1998, 30(2): 193-202.
Zhou Weiyuan, Kou Xiaodong. Meshless Method and Engineering Application [J]. Acta Mechanica Sinica, 1998, 30(2): 193-202. (in Chinese)
- [5] Luis Gavete, Juan J Benito, Santiago Falcon, etc. Penalty functions in constrained variational principles for element free Galerkin method [J]. Eur. J. Mech. A/Solids, 2000, 19: 699-720.
- [6] Peterson P E. Crack growth and development of fracture zone in plain concrete and similar material, Doctoral dissertation[D]. Lund Institute of Technology, Sweden, 1981: 174.
- [7] GB 50010-2002 混凝土结构设计规范 [S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002. 206-208.
GB 50010-2002 Code for design of concrete structures [S]. Beijing: China Building Industry Press, 2002. 206-208. (in Chinese)